REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

Coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo

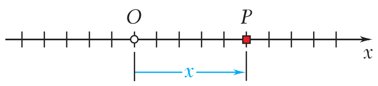

Figura 11.27

En la primera mitad del capítulo se analizó el *movimiento rectilíneo de una partícula*, esto es, el movimiento de la partícula a lo largo de una línea recta. Para definir la posición P de la partícula sobre esa línea se elige un origen fijo, O, y una dirección positiva (figura 11.27). La distancia x desde O hasta P, con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula sobre la línea y recibe el nombre de *coordenada de posición* de la partícula [sección 11.2].

Velocidad y aceleración en movimiento rectilíneo

Se demostró que la *velocidad* v de la partícula era igual a la derivada respecto al tiempo de la coordenada de posición x,

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

y la *aceleración* a se obtuvo diferenciando v con respecto a t,

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

o

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

También se señaló que a podría expresarse como

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

Se observó que la velocidad v y la aceleración a se representarán mediante números algebraicos que pueden ser positivos o negativos. Un valor positivo de v indica que la partícula se mueve en dirección positiva, y un valor negativo que lo hace en dirección negativa. Sin embargo, un valor positivo para a tal vez signifique que la partícula realmente está acelerada (esto es, se mueve más rápido) en dirección positiva, o que está desacelerada (esto es, que se mueve con mayor lentitud) en dirección negativa. Un valor negativo para a está sujeto a una interpretación similar [problema resuelto 11.1].

Determinación de la velocidad y la aceleración mediante integración

En la mayoría de los problemas, las condiciones de movimiento de una partícula se definen mediante el tipo de aceleración que ésta posee y por medio de las condiciones iniciales [sección 11.3]. La velocidad y posición de la partícula pueden obtenerse entonces integrando dos de las ecuaciones (11.1) a (11.4). Cuál de ellas seleccionar depende del tipo de aceleración implicada [problemas resueltos 11.2 y 11.3].

Movimiento rectilíneo uniforme

A menudo se encuentran dos tipos de movimiento: el *movimiento rectilíneo uniforme* [sección 11.4], en el cual la velocidad v de la partícula es constante y

$$x = x_0 + vt \qquad (11.5)$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* [sección 11.5], en el cual la aceleración a de la partícula es constante y se tiene

$$v = v_0 + at \qquad (11.6)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (11.7)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (11.8)$$

Movimiento relativo de dos partículas

Cuando dos partículas A y B se mueven a lo largo de la misma línea recta, es probable que nos interese considerar el *movimiento relativo* de B con respecto a A

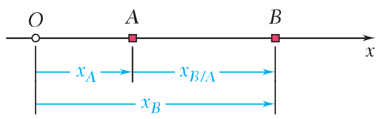

Figura 11.28

[sección 11.6]. Si se denota mediante $x_{B/A}$ la *coordenada de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.28), se tiene

$$x_B = x_A + x_{B/A} \qquad (11.9)$$

Al diferenciar la ecuación (11.9) dos veces con respecto a t, se obtiene sucesivamente

$$v_B = v_A + v_{B/A} \qquad (11.10)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (11.11)$$

donde $v_{B/A}$ y $a_{B/A}$ representan, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A.

Bloques conectados mediante cuerdas de longitud constante

Cuando varios bloques se *conectan mediante cuerdas de longitud constante*, es posible escribir una *relación lineal* entre sus coordenadas de posición. Es posible escribir entonces relaciones similares entre sus velocidades y entre sus aceleraciones que se usan para analizar su movimiento [problema resuelto 11.5].

Soluciones gráficas

En ocasiones resulta conveniente utilizar una *solución gráfica* para problemas que implican el movimiento rectilíneo de una partícula [secciones 11.7 y 11.8]. La solución gráfica que se usa de manera más común incluye a las curvas x-t, v-t y a-t [sección 11.7; problema resuelto 11.6]. Se demostró que, a cualquier tiempo t,

$$v = \text{pendiente de la curva } x\text{-}t$$
$$a = \text{pendiente de la curva } v\text{-}t$$

en tanto que, sobre cualquier intervalo de tiempo dado de t_1 a t_2,

$$v_2 - v_1 = \text{área bajo la curva } a\text{-}t$$
$$x_2 - x_1 = \text{área bajo la curva } v\text{-}t$$

Vector de posición y velocidad en movimiento curvilíneo

En la segunda mitad del capítulo se estudió el *movimiento curvilíneo de una partícula*, es decir, el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva. La posición P de la partícula en cualquier tiempo dado [sección 11.9] se definió por medio del *vector de posición* $\mathbf{r}$ que une al origen O de las coordenadas y al punto P (figura 11.29). La *velocidad* $\mathbf{v}$ de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

y se encontró que era un *vector tangente a la trayectoria de la partícula* y de magnitud v (denominada *rapidez* de la partícula) igual a la derivada en el tiempo de la longitud s del arco descrito por la partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

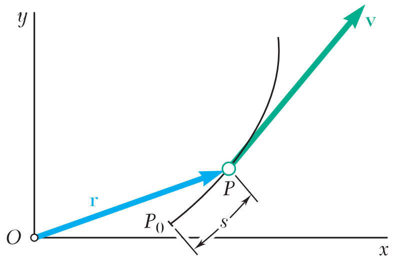

Figura 11.29

Aceleración en movimiento curvilíneo

La *aceleración* $\mathbf{a}$ de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

y se señaló que, en general, *la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula.*

Derivada de una función vectorial

Antes de proceder a la consideración de las componentes de velocidad y aceleración, se estudió la definición formal de la derivada de una función vectorial y se establecieron algunas reglas que gobiernan la diferenciación de sumas y productos de funciones vectoriales. Después se mostró que la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia en traslación [sección 11.10].

Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Al denotar mediante x, y y z las coordenadas rectangulares de una partícula P, se encontró que las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de P resultan iguales, respectivamente, a la primera y segunda derivadas con respecto a t de las coordenadas correspondientes:

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$
$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Movimientos de las componentes

Cuando la componente a_x de la aceleración depende únicamente de t, x, y/o v_x, y cuando de manera similar a_y depende sólo de t y/o v_y, y a_z de t, z y/o v_z, las ecuaciones (11.30) se integran de forma independiente. El análisis del movimiento curvilíneo dado se reduce de ese modo al análisis de tres movimientos de componentes rectilíneas independientes [sección 11.11]. Este enfoque es en particular efectivo en el estudio del movimiento de proyectiles [problemas resueltos 11.7 y 11.8].

Movimiento relativo de dos partículas

En el caso de dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 11.30), consideramos el movimiento relativo de B con respecto a A, o más precisamente, con respecto al sistema de referencia en movimiento unido A y en traslación con A [sección 11.12]. Al denotar mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el *vector de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.30), se obtuvo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Al denotar con $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A, se demostró también que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

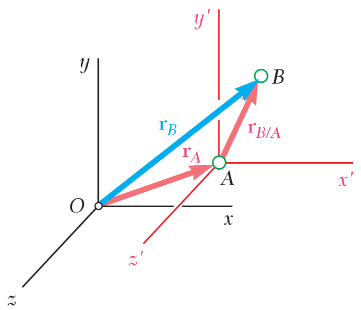

Figura 11.30

Componentes tangencial y normal

Algunas veces es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de una partícula P en componentes diferentes a las rectangulares x, y y z. En el caso de una partícula P que se mueve a lo largo de la trayectoria contenida en un plano, se unen a P los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ tangente a la trayectoria y $\mathbf{e}_n$ normal a la trayectoria y dirigido hacia el centro de curvatura de la misma [sección 11.13]. Se expresa entonces la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de las componentes tangencial y normal. Se escribe

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

donde v es la rapidez de la partícula y ρ el radio de curvatura de su trayectoria [problemas resueltos 11.10 y 11.11]. Se observa que mientras la velocidad $\mathbf{v}$ está dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria, la aceleración $\mathbf{a}$ consta de una componente $\mathbf{a}_t$ dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria y de una componente $\mathbf{a}_n$ que apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria (figura 11.31).

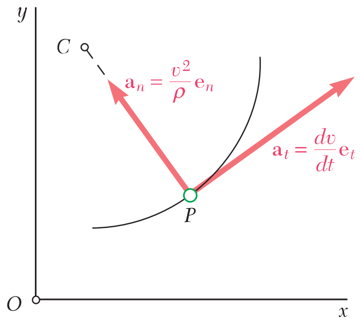

Figura 11.31

Movimiento a lo largo de una curva espacial

Para una partícula P que se mueve a lo largo de una curva en el espacio, se definió el plano que se ajusta mejor a la curva en la vecindad de P como el *plano osculador*. Este plano contiene a los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ que define, respectivamente, la tangente y la normal principal a la curva. El vector unitario $\mathbf{e}_b$ que es perpendicular al plano osculador define la *binormal*.

Componentes radial y transversal

Cuando la posición de una partícula P que se mueve en un plano se define mediante sus coordenadas polares r y θ, es conveniente utilizar las componentes radial y transversal dirigidas, respectivamente, a lo largo del vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula y en la dirección obtenida al rotar $\mathbf{r}$ 90° en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj [sección 11.14]. Se unen a P los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ dirigidos, respectivamente, en las direcciones radial y transversal (figura 11.32). Después se expresa la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de componentes radial y transversal

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

donde los puntos se usan para indicar diferenciación con respecto al tiempo. Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración en las direcciones radial y transversal son en consecuencia

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

Es importante observar que a_r *no* es igual a la derivada en el tiempo de v_r, y que a_θ *no* es igual a la derivada en el tiempo de v_θ [problema resuelto 11.12].

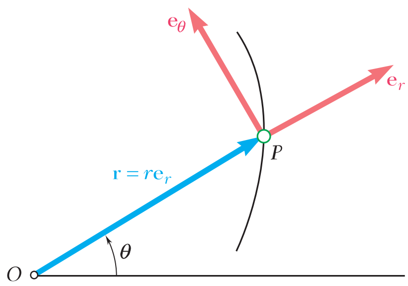

Figura 11.32

El capítulo finaliza con el estudio del uso de las coordenadas cilíndricas para definir la posición y el movimiento de una partícula en el espacio.