

VIBRACIONES FORZADAS

OBJETIVOS:

Al finalizar el tema el estudiante estará en capacidad de determinar la solución particular en vibraciones donde intervienen fuerzas periódicas externas. Para ello ha de ser capaz de:

- Reconocer una vibración forzada, indicando su ecuación diferencial.
- Determinar la solución particular de una ecuación diferencial forzada.
- Definir Resonancia; estableciendo las ecuaciones que describen el comportamiento vibratorio de un sistema físico en esta condición.
- Aplicar los resultados de vibraciones forzadas a los circuitos eléctricos.
- Definir los términos de Impedancia, Reactancia y resistencia.
- Aplicar el modelo de los vectores rotatorios en determinación de la solución particular de un sistema vibratorio forzado.

5.1.- MOVIMIENTOS VIBRATORIOS FORZADOS.

Las vibraciones producidas de forma natural al sacar un sistema físico de su posición de equilibrio, presentan una frecuencia angular conocida como frecuencia angular natural (ω), que depende únicamente de las propiedades físicas de los materiales. Esto es despreciando la fricción que: $\omega^2 = K/m$; y para el caso de un resorte y una masa tenemos que $\omega^2 = ag/L$ en péndulos simples, etc.

La presencia permanente de fuerzas fricción hace; sin embargo, que estas frecuencias angulares sean un poco menores; y dependiendo de la constante de fricción (c) y terminan por hacer que el sistema vuelva a su posición de equilibrio.

Sin embargo muy a menudo sucede que no se deja vibrar a los sistemas en su forma natural, sino que son perturbados continuamente de un modo que se repite regularmente. Esto tiene generalmente dos consecuencias: primero compensar las pérdidas de energía del sistema natural y segundo hacer que el sistema vibre a una frecuencia distinta a su frecuencia natural.

Un ejemplo simple de esta situación es cuando un niño en un columpio es continuamente empujado hacia arriba por su padre ubicado detrás del columpio. Si el empuje al columpio por parte del adulto ocurre en un momento tal incrementa la altura final y mantiene la frecuencia natural del columpio, el empuje suministrado aumentó la energía potencial y compensó las pérdidas que existen por las fuerzas de

fricción, estamos ante el caso que se conoce como resonancia. Si por el contrario el padre agarra la base del columpio y la mueve al ritmo y amplitud que permiten sus brazos, no dejando al columpio moverse libremente, entonces estamos ante una vibración forzada cualquiera sobre el sistema.

5.2.- MOVIMIENTOS FORZADOS NO AMORTIGUADOS.

En un movimiento vibratorio no amortiguado, que es sometido a la acción de una fuerza externa periódica, de frecuencia angular ω_f , viene descrito por una ecuación diferencial de la forma:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + K \cdot x &= F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \\ \ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x &= \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad 5.1 \\ \ddot{x} + \omega^2 \cdot x &= \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial presenta dos soluciones, la primera conocida como solución homogénea, la cual corresponde a la solución de la ecuación diferencial del movimiento (igualando a cero), que no es otra que la solución del movimiento armónico simple. La segunda corresponde a la solución particular, que se obtiene de igualar la ecuación a la fuerza externa.

5.2.1.- Solución Particular de la Vibración Forzada No Amortiguada.

Para determinar la solución particular, esta debe tener no sólo una expresión similar a la función forzada ($F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$), sino también las posibles derivadas de dicha función, así diremos que la función $x_p(t)$ debe tener una forma trigonométrica, y dado que esta fuerza genera un movimiento armónico de frecuencia angular ω_f entonces:

$$x_p = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t)$$

Derivando respecto al tiempo tenemos para la primera y segunda derivada:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= -A \cdot \omega_f \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) + B \cdot \omega_f \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \\ \ddot{x}_p &= -A \cdot \omega_f^2 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) - B \cdot \omega_f^2 \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) \end{aligned}$$

remplazando en la ecuación diferencial 5.1 y agrupando términos comunes resulta:

$$[\omega^2 - \omega_f^2] \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + [\omega^2 - \omega_f^2] \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

Donde resolviendo el sistema de ecuaciones que plantea la igualdad se obtienen los valores de las constantes A y B.

$$A = \frac{F_0}{m[\omega^2 - \omega_f^2]} \quad 5.2$$

$$B = 0$$

En definitiva se tiene que la solución de la vibración forzada no amortiguada es la suma de dos movimientos armónicos de diferente frecuencia angular, esto es una vibración pulsante.

$$x = x_{\text{homogenea}} + x_{\text{particular}} \quad 5.3$$
$$x = A_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) + \frac{F_0}{m \cdot [\omega^2 - \omega_f^2]} \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

5.2.2.- La Resonancia en Vibraciones forzadas no amortiguadas.

Es de observar en la solución 5.3 que si la frecuencia angular forzada es igual a la frecuencia angular natural, el término de la solución particular es infinito; se dice entonces que el sistema a entrado resonancia ($\omega = \omega_f$); en este caso la energía transferida por la fuerza externa al oscilador esta al máximo. La ecuación diferencial en esta situación es:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = (F_0/m) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad 5.4$$

Para determinar la solución particular de la ecuación anterior aplicamos el mismo procedimiento anterior pero aplicando la regla de modificación (ver tema N°3), a fin de que el resultado no sea nulo; tenemos así que:

$$x_p = t \cdot [A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]$$

Derivando dos veces respecto al tiempo tenemos:

$$\dot{x}_p = 1 \cdot [A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] + t \cdot [-A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)] \rightarrow$$

$$\dot{x}_p = [A + B \cdot \omega \cdot t] \cdot \cos(\omega \cdot t) + [B - A \cdot \omega \cdot t] \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{x}_p = 2 \cdot [-A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)] + t \cdot [-A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - B \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] \rightarrow$$

$$\ddot{x}_p = [2 \cdot B \cdot \omega - A \cdot \omega^2] \cdot \cos(\omega \cdot t) + [-2 \cdot A \cdot \omega - B \cdot \omega^2] \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

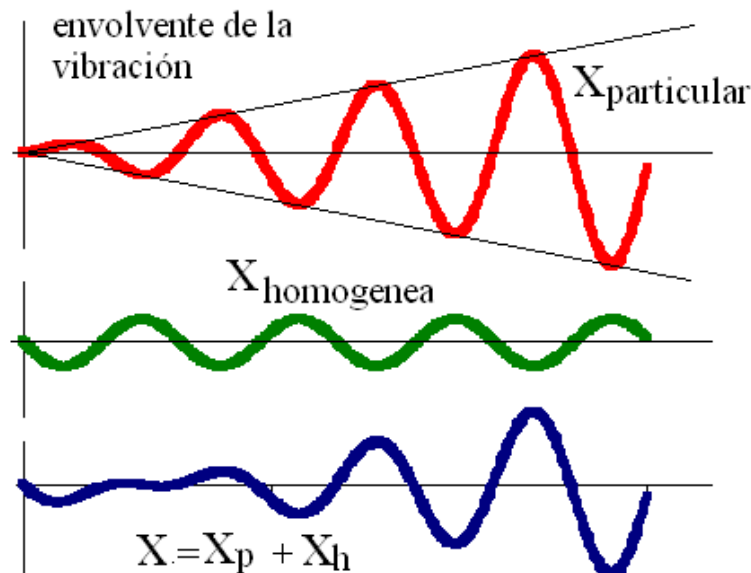
Remplazando en la ecuación diferencial 5.4 y agrupando términos comunes resulta:

$$[2 \cdot B \cdot \omega] \cdot \cos(\omega \cdot t) - [2 \cdot A \cdot \omega] \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Donde resolviendo el sistema de ecuaciones que plantea la igualdad se obtienen los valores de las constantes "A" y "B".

$$A = 0$$

$$B = \frac{F_0}{2 \cdot m \cdot \omega} \quad 5.5$$



Solución de la Vibración forzada sin fricción en el caso de resonancia

Figura 05-01

La solución toma la forma final:

$$x = x_h + x_p = A_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) + \left[\frac{F_0}{2 \cdot m \cdot \omega} \cdot t \right] \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad 5.6$$

5.3.- VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS.

En este caso la ecuación diferencial incluye el término de amortiguación viscosa, tiene entonces la forma diferencial.

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x &= F_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \\ \ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{K}{m} \cdot x &= \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad 5.7 \\ \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x &= \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \end{aligned}$$

Donde $\gamma = c/m$, y se conoce como **amplitud de la resonancia**; existen igualmente dos soluciones; una homogénea cuando la ecuación se iguala a cero, que sabemos resolver del tema anterior la parte homogénea (una vibración amortiguada) y para determinar la solución particular aplicamos el procedimiento del punto anterior 5.2.1; sea la solución particular de la forma:

$$x_p = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t)$$

Y sus derivadas respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= -A \cdot \omega_f \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) + B \cdot \omega_f \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \\ \ddot{x}_p &= -A \cdot \omega_f^2 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) - B \cdot \omega_f^2 \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 5.7 tenemos al agrupar términos comunes el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A \cdot (\omega^2 - \omega_f^2) + B \cdot \gamma \cdot \omega_f &= \frac{F_0}{m} \\ -A \cdot \gamma \cdot \omega_f + B \cdot (\omega^2 - \omega_f^2) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de las constantes "A" y "B".

$$A = \frac{\frac{F_0}{m} \cdot (\omega^2 - \omega_f^2)}{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma \cdot \omega_f)^2} \quad 5.8$$

$$B = \frac{\frac{F_0}{m} \cdot (\gamma \cdot \omega_f)}{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma \cdot \omega_f)^2}$$

La solución particular toma la forma de:

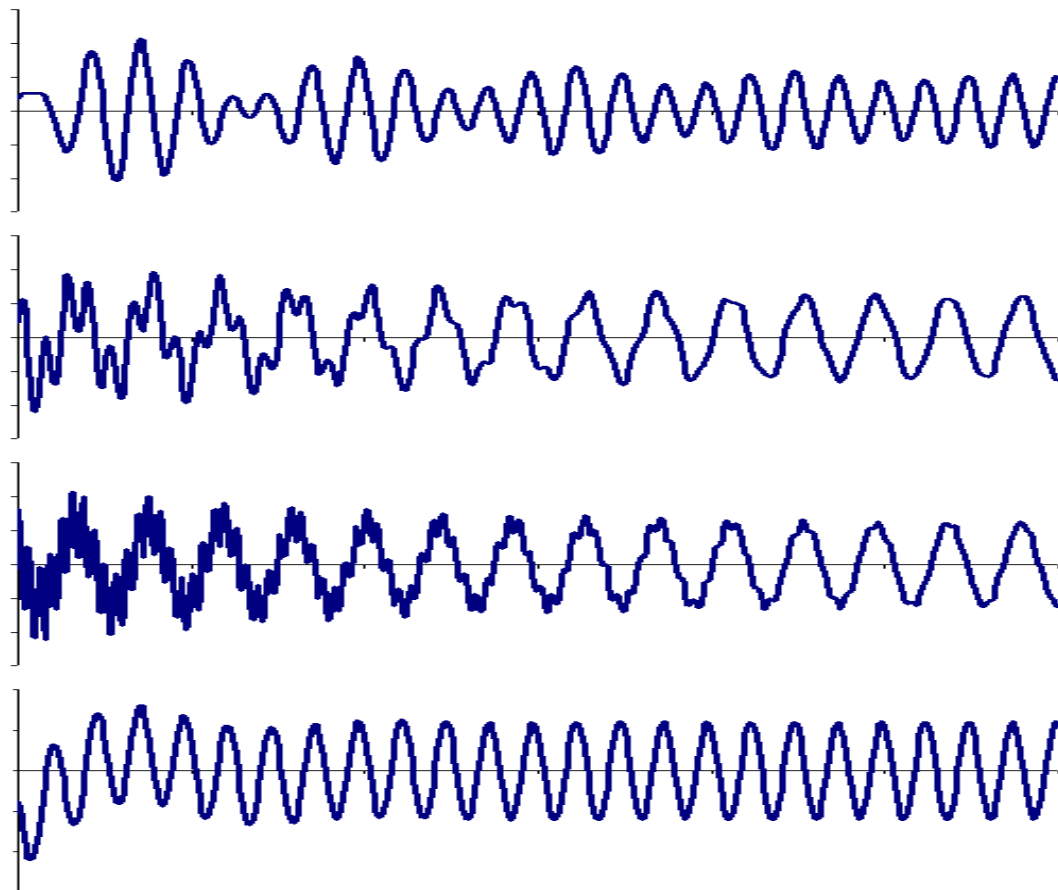
$$x_p = \left[\frac{F_0}{m} \right] \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_f^2) \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + (\gamma \cdot \omega_f) \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t)}{[(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma \cdot \omega_f)^2]} \quad 5.9$$

Como las funciones seno y coseno de la expresión 5.9 tienen igual frecuencia angular, entonces debe ocurrir por suma de movimientos armónicos de igual frecuencia que la solución particular puede ser escrita de la forma:

$$x_p = A_p \cdot \cos(\omega_f \cdot t + \phi_p) \quad 5.10$$

Escogemos coseno dado que es la función trigonométrica presente en la fuerza externa actuante.

La solución final es la suma de una vibración amortiguada y una función de M.A.S. con frecuencia angular de la vibración forzadas. Dado que la vibración amortiguada después de cierto tiempo su presencia es nula, entonces la vibración resultante es prácticamente la solución particular. Que es la que se toma en cuenta generalmente para los resultados.



**Ejemplos de Vibraciones Forzadas amortiguadas
a la larga solo prevalece la vibración forzada**

Figura 05-02

5.3.1.- Amplitud de la Solución Particular de la Vibración Forzada.

Como los vectores rotatorios de la solución particular forman entre si un ángulo de 90° , entonces por Teorema de Pitágoras tenemos:

$$A_p = \frac{[F_0/m]}{\sqrt{[(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma \cdot \omega_f)^2]}} \quad 5.11$$

Para estudiar el comportamiento de la función amplitud de la vibración forzada en función de la frecuencia angular forzada aplicamos análisis diferencial para conocer máximos y mínimos, derivando e igualando a cero resulta:

$$\frac{dAp(\omega_f)}{d\omega_f} = \frac{[Fo/m] \cdot \omega_f \cdot [\gamma^2 - 2(\omega^2 - \omega_f^2)]}{[(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma \cdot \omega_f)^2]^{3/2}} = 0$$

Existen dos posibilidades; primero cuando $\omega_f = 0$; en este caso la amplitud será constante y vale:

$$Ap_o = Ap(\omega_f = 0) = \frac{Fo}{m \cdot \omega^2} \quad 5.12$$

La segunda posibilidad se presenta cuando $\gamma^2 - 2(\omega^2 - \omega_f^2) = 0$, de donde resulta que la frecuencia angular crítica es:

$$\omega_{f \text{ critica}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \quad 5.13$$

El valor de la raíz define las siguientes situaciones:

Si $\omega^2 < \gamma^2/2$, estamos en situaciones donde la fricción es grande, la raíz es nula o no tiene solución real, ello implica que el único máximo en la curva se presenta para $\omega_f=0$ y la curva de amplitud decrece desde Ap_o conforme aumenta la frecuencia angular forzada.

Cuando $\omega^2 > \gamma^2/2$, la fuerzas de fricción son pequeñas, existe un valor real distinto de cero, luego hay una frecuencia forzada crítica tal que la amplitud es máxima. Este punto de amplitud máxima indica que la resonancia del sistema adquiere importancia. La curva que describe la amplitud aumenta desde Ap_o hasta alcanzar el máximo en la frecuencia forzada crítica y a partir de esta frecuencia empieza a disminuir hacia cero. La amplitud forzada en el valor de la frecuencia angular crítico es:

$$Ap(\omega_{f \text{ critica}}) = \frac{Fo/m}{\sqrt{\gamma^2(\omega^2 - (\gamma/2)^2)}} = \frac{Fo/c}{\sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}} \quad 5.14$$

Cuando no hay fricción ($c=0$), la amplitud máxima es infinita cuando la frecuencia angular natural y forzada son iguales. La amplitud forzada, presenta su máximo cuando la solución homogénea es una vibración libre críticamente amortiguada.

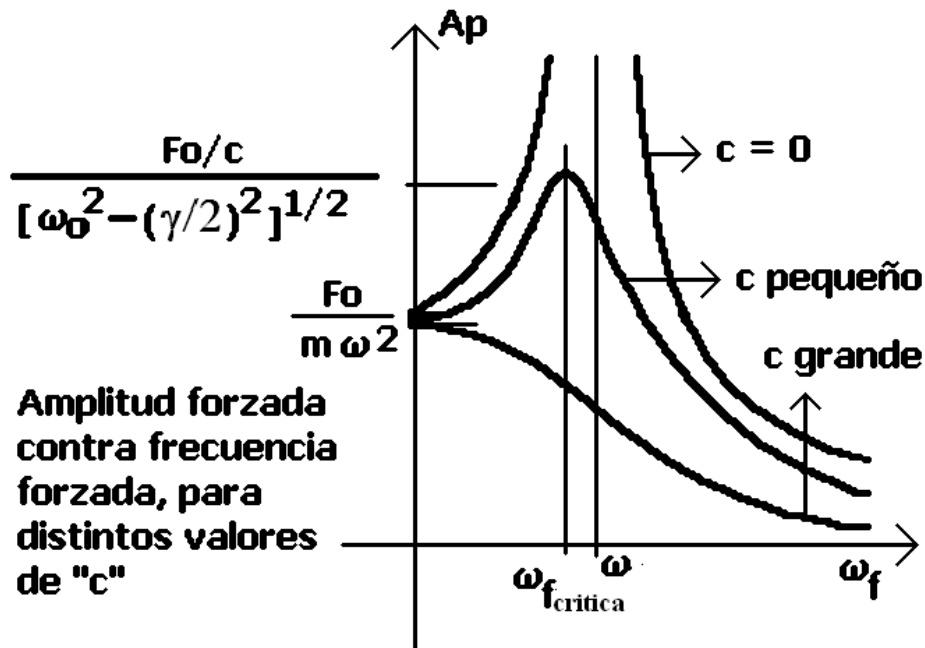


Figura 05-03

5.3.2.- Fase de Retraso en la Oscilación Forzada.

La fase de retraso (llamada así porque se resta y no se suma), denotada " ϕ_p " en la solución 5.10 viene dada, al hacer uso de los vectores rotatorios, por:

$$\tan(\phi_p) = \frac{\gamma \cdot \omega_f}{[\omega^2 - \omega_f^2]} \quad 5.15$$

El valor de ϕ_p está comprendido entre los 0 radianes y π radianes; en primer término si no hay amortiguación ($c = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$), la tangente debe ser nula; ello implica dos posibilidades; cuando la frecuencia angular forzada es menor que la natural ($\omega > \omega_f$), entonces $\phi_p = 0$ radian; caso contrario ($\omega < \omega_f$), $\phi_p = \pi$ radianes. Cuando ambas frecuencias son iguales no existe valor para la fase de retraso.

Cuando existe amortiguación, entonces independientemente del valor de la amortiguación debe ocurrir que si las frecuencias angulares forzada y natural son iguales ($\omega = \omega_f$), la fase de retraso es $\phi_p = \pi/2$ radianes.

Para valores de ($\omega < \omega_f$) la fase de inicio ha de encontrarse entre los 0 radian y $\pi/2$ radianes; y cuando ($\omega > \omega_f$) la fase de inicio se encuentra entre los $\pi/2$ radianes y los π radianes.

El valor del coeficiente de fricción afecta la forma de la curva; existen dos concavidades una positiva en un primer tramo y una negativa en otro. Cuando "c" es grande entonces la curva resultante tiene concavidades pequeñas (se aproxima a un tramo recto), caso contrario la concavidad es bastante grande y la curva trata de aproximarse a la forma de la gráfica cuando no hay amortiguación.

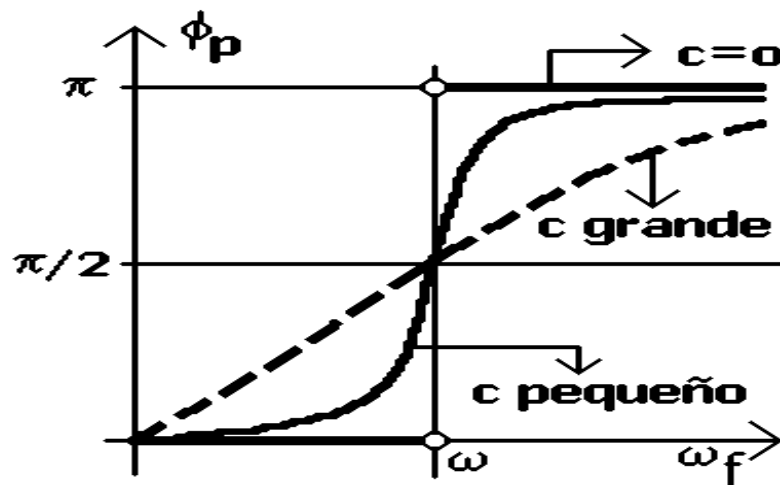


Figura 04-05

5.4.- VIBRACIONES ELÉCTRICAS.

Los sistemas físicos presentan comportamiento dinámicos muy similares; caso del sistema masa - resorte y el péndulo simple. Esta analogía de comportamiento es también extensible a circuitos eléctricos. Estudiemos primeramente los casos donde se combinan resistencias, condensadores y bobinas con una fuente de poder de corriente alterna en forma individual a fin de analizar los resultados.

5.4.1.- Circuito R con corriente alterna.

Aplicando reglas de Kirchoff y Ohm tenemos:

$$\underline{V_R = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t)} \quad 5.16$$

Siendo V_R el producto de la corriente eléctrica que atraviesa el circuito por la resistencia del mismo; luego la corriente del circuito es:

$$\underline{i = i_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) = \frac{V_o}{R} \cdot \cos(\omega_f \cdot t)} \quad 5.17$$

Si se representaran la corriente eléctrica y el potencial de la resistencia haciendo uso de los vectores rotatorios, es claro que ambos vectores estarían en fase.

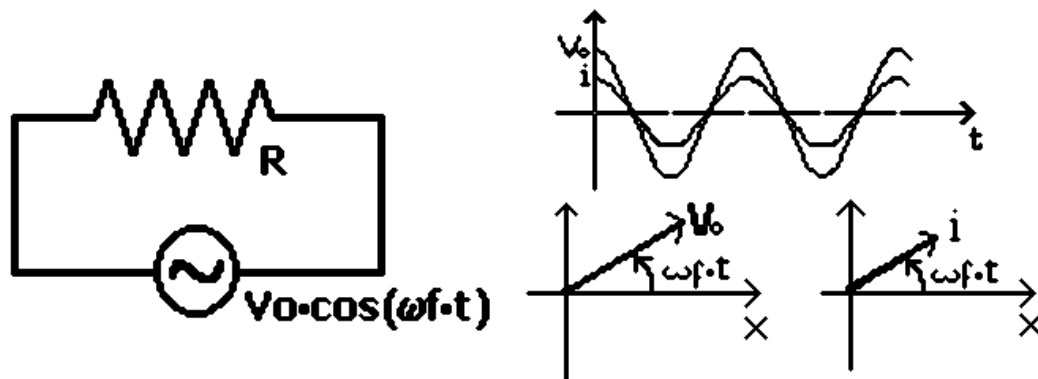


Figura 05-05

5.4.2.- Circuito C con corriente alterna.

Aplicando reglas de Kirchoff y Ohm tenemos:

$$\underline{V_C = V_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t)} \quad 5.18$$

Siendo V_C el potencial del condensador este es igual a la carga acumulada en el condensador entre la capacidad del mismo ($V_C = q/C$); luego la carga del circuito es:

$$\underline{q = q_0 \cdot \cos(\omega_f \cdot t) = V_0 \cdot C \cdot \cos(\omega_f \cdot t)} \quad 5.19$$

Como la corriente del circuito es la carga por unidad de tiempo que pasa por una sección del circuito, entonces derivando tenemos:

$$\underline{i = -V_0 \cdot C \cdot \omega_f \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t)} \quad 5.20$$

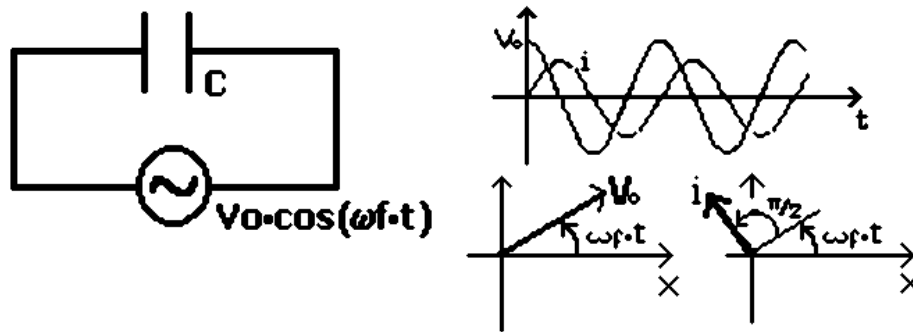


Figura 06-05

La función $-\text{sen}(\theta) = \cos(\theta + \pi/2)$, luego la representación vectorial de la corriente y el potencial del condensador indicaría que ambos están desfasados; la corriente eléctrica esta adelantada un cuarto del periodo respecto al potencial del condensador.

Generalmente para simplificar la notación de una forma parecida al caso de la resistencia se define como **reactancia del condensador** a:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega_f} \quad 5.21$$

Donde la corriente que circuito indicado es:

$$i = i_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t + \pi/2) = \frac{V_o}{X_C} \cdot \cos(\omega_f \cdot t + \pi/2) \quad 5.22$$

5.4.3.- Circuito L con corriente alterna.

Aplicando reglas de Kirchoff y Ohm tenemos:

$$V_L = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad 5.23$$

Siendo V_L el potencial de la bobina; este es igual al cambio de corriente respecto al tiempo multiplicado por la inductancia del circuito. ($V_L = L \cdot di/dt$); luego separando variables e integrando resulta que la corriente del circuito es:

$$i = \frac{V_o}{L \cdot \omega_f} \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) \quad 5.24$$

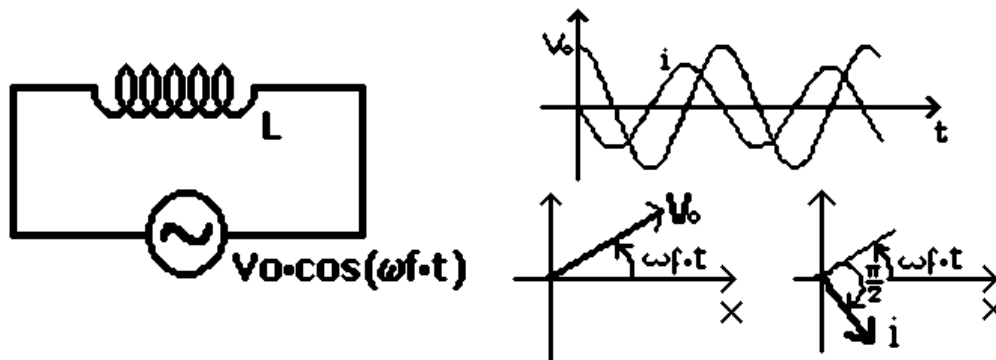


Figura 05-07

La función $\text{sen}(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$, luego la representación vectorial de la corriente y el potencial de la bobina están desfasados. La corriente eléctrica está atrasada un cuarto del periodo respecto al potencial de la bobina. Al igual que con el condensador para

////////////////////////////////////
simplificar la notación de una forma parecida al caso de la resistencia se define como **reactancia de la bobina** a:

$$\underline{X_L = L \cdot \omega_f} \quad 5.25$$

Donde tenemos que la corriente que circuito indicado en la figura

$$\underline{i = i_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \pi/2) = \frac{V_o}{X_L} \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \pi/2)} \quad 5.26$$

5.4.4.- Circuito CRL en serie con corriente alterna.

Cuando se combinan un condensador, una resistencia y una bobina en serie con un generador de corriente alterna, debe ocurrir por reglas de Kirchhoff que:

$$\begin{aligned} V_L + V_R + V_C &= V = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \\ L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} &= V = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad 5.27 \\ L \cdot \ddot{q} + R \cdot \dot{q} + \frac{1}{C} \cdot q &= V = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \end{aligned}$$

Como de los resultados anteriores el potencial eléctrico de la resistencia esta en fase con la corriente mientras que el potencial del condensador esta en retraso y el de la bobina en adelanto, podemos suponer que cada uno de estos elementos del circuito tienen un comportamiento similar cuando se combinan; si aplicamos teoría de vectores rotatorios estaríamos ante una suma de vectores, así podemos decir que la magnitud del vector rotatorio V_o esta dado por Teorema de Pitágoras:

$$\underline{V_o^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad 5.28$$

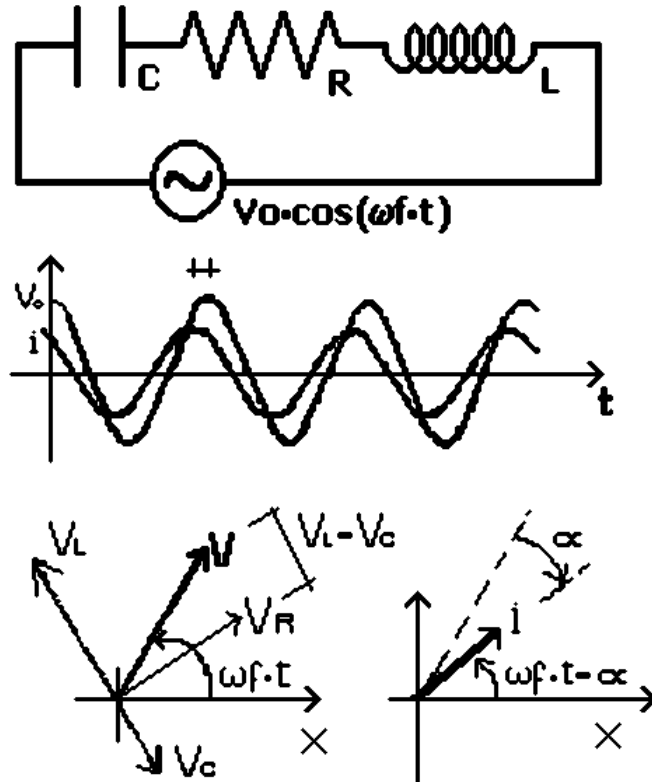


Figura 05-08

Como las magnitudes de los vectores " V_R ", " V_L " y " V_C " son respectivamente: " $R \cdot i_0$ ", " $X_L \cdot i_0$ " y " $X_C \cdot i_0$ "; donde " i_0 " es magnitud del vector rotatorio que describe la corriente eléctrica; resulta entonces:

$$\underline{V_0 = Z \cdot i_0} \quad 5.29$$

Donde Z define a **la impedancia del circuito eléctrico** y esta dada para el circuito indicado por:

$$V_0^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \rightarrow$$

$$(Z \cdot i_0)^2 = (R \cdot i_0)^2 + (X_L \cdot i_0 - X_C \cdot i_0)^2 \rightarrow$$

$$\underline{Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 5.30$$

Como la corriente esta en fase con el potencial de la resistencia, debe existir una diferencia de fase (ϕ) entre la corriente (i) y el potencial de la fuente (V), dada por:

$$i = i_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t - a) \quad 5.31$$

Siendo:

$$\text{tang}(a) = \frac{X_L - X_C}{R} \quad 5.32$$

5.4.5.- Circuito CRL en paralelo con corriente alterna.

Cuando se combinan en paralelo un condensador, una resistencia y una bobina con un generador de corriente alterna, debe ocurrir por reglas de Kirchhoff que el potencial eléctrico del circuito es igual para el capacitador, la resistencia y la bobina. La corriente total es la suma de las corrientes que circulan por cada elemento; luego por vectores rotatorios tenemos:

$$V_C = V_R = V_L = V = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad 5.33$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} = R \cdot i = \frac{q}{C} = V = V_o \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

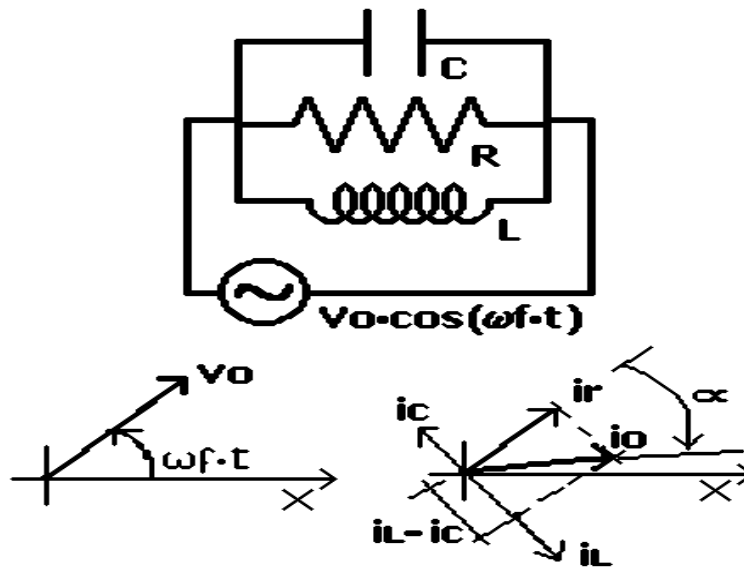


Figura 05-09

Para determinar la magnitud del vector rotatorio "io" aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\underline{\underline{io^2 = i_R^2 + (i_L - i_C)^2 \quad 5.34}}$$

Como las magnitudes de los vectores son: "io = Vo/Z"; "i_R = V_R/R", "i_L=V_L/X_L" y "i_C"=V_C/X_C" entonces la impedancia del sistema resulta ser:

$$\left[\frac{V_O}{Z} \right]^2 = \left[\frac{V_R}{R} \right]^2 + \left[\frac{V_L}{X_L} - \frac{V_C}{X_C} \right]^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right]^2 \quad 5.35$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left[\frac{1}{L \cdot \omega_f} - C \cdot \omega_f \right]^2$$

Por lo tanto **la impedancia del circuito depende de la forma en que se combinan los distintos componentes y es propia de cada circuito.**

El ángulo "α" viene dado en la combinación en paralelo por:

$$\underline{\underline{tang(\alpha) = \frac{\left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right]}{\frac{1}{R}} \quad 5.36}}$$

$$\underline{\underline{tang(\alpha) = \frac{R \cdot (X_C - X_L)}{X_L \cdot X_C}}}$$

5.4.6.- Analogías entre sistemas mecánicos y circuitos eléctricos.

Si se compara la expresión 5.27 con la 5.7, nos encontramos ante la misma ecuación diferencial:

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = Vo \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = Fo \cdot \cos(\omega_f \cdot t)$$

Donde las soluciones particulares eran:

$$i_p = io \cdot \cos(\omega_f \cdot t - a)$$

$$x_p = A_p \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \phi_p)$$

Por comparación de expresiones resultan equivalentes:

Vibración mecánica	Vibración eléctrica
m	L
c	R
K	$1/C$
Fo	Vo
$A_p = Fo/Z$	$io = Vo/Z$
$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$	
$X_L = m \cdot \omega_f$	$X_L = L \cdot \omega_f$
$X_C = \frac{K}{\omega_f}$	$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega_f}$
$tang(\phi_p) = \frac{R}{X_L - X_C}$	$tang(a) = \frac{X_L - X_C}{R}$

REFERENCIAS

- 1.- **FÍSICA. Volumen I. Mecánica.**
Marcelo Alonso y Edward J. Finn.
Addison - Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.
- 2.- **VIBRACIONES Y ONDAS. Curso de Física del M.I.T.**
A.P. French.
Editorial Reverte, S. A. España. 1982.
- 3.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Dinámica.**
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston.
Libros McGrall-Hill. México 1979.
- 4.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Volumen II. Dinámica.**
Harry R. Nara.
Editorial Limusa. México 1979.
- 5.- **MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA. Volumen 1.**
Erwin Kreyszig.
Editorial Limusa. México 1981.
- 6.- **CALCULUS. Volumen 1.**
Tom M. Apostol.
Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. 1982.
- 7.- **FÍSICA GENERAL. Volumen I.**
Douglas C., Ginacoli.
Prentice - Hall hispanoamericana, S.A. México 1988.
- 8.- **FÍSICA tomo I.**
Paul A. Tipler.
Editorial Reverte, S.A. Colombia 1990.
- 9.- **FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y DE LA SALUD.**
Simon G. G. MacDonald. Y Desmond M. Burns.
Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1978.