VIBRACIONES AMORTIGUADAS

OBJETIVOS:

Al finalizar el tema el estudiante ha de estar en capacidad de determinar la solución de movimiento vibratorios libres que presentan amortiguación viscosa. Para ello debe ser capaz de:

- Definir que son fuerzas de fricción (o amortiguación), indicando los distintos tipos de fuerzas de amortiguación.
- Establecer la ecuación diferencial de un movimiento vibratorio libre con amortiguación viscosa
- Determinar la solución de la ecuación diferencial del movimiento amortiguado.
- Diferenciar, explicando su comportamiento, los movimientos: sobre - amortiguado, amortiguado critico y ligeramente amortiguado.
- Determinar las perdidas de energía por ciclo en movimientos vibratorios libres ligeramente amortiguados.

4.1.- TIPOS DE FUERZAS DE AMORTIGUACIÓN.

Hemos considerado hasta el momento sólo movimientos donde no ocurren perdidas de energía; ideales desde el punto de vista físico. Las leyes de la termodinámica señalan la imposibilidad de existencias de trabajos infinitos sin la entrada permanente de energía.

Las perdidas de energía suelen estar asociadas a fuerzas de fricción; estas fuerzas se caracterizar por ser siempre opuestas al desplazamiento (a la velocidad). Las fuerzas de fricción son las responsables de que los movimientos vibratorios reduzcan su amplitud, y terminen llevando el cuerpo al reposo. En este punto señalaremos sólo cuatro tipos de amortiguación, comunes en sistemas mecánicos.

4.1.1.- Amortiguación Viscosa.

Esta asociada a cuerpos que se mueven de forma moderada dentro de fluidos; en este caso la fuerza de fricción es proporcional y opuesta a la velocidad:

$$F_f = -c \cdot v = -c \cdot \frac{dx}{dt} \quad 4.1$$

Donde la cantidad "c" es una constante de proporcionalidad y "v" es la rapidez relativa entre el cuerpo y el fluido. Este tipo de amortiguación se encuentra en superficies lubricadas, amortiguadores hidráulicos y mecánicos, partes movibles de instrumentos metidas en aceite.

4.1.2.- Amortiguación Turbulenta.

Se presenta si el cuerpo se mueve con una rapidez relativa muy grande con respecto al fluido; en este caso la fuerza de fricción es proporcional y opuesta al cuadrado de la velocidad.

$$F_f = -b \cdot v^2 = -b \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad 4.2$$

Siendo la cantidad "b" la constante de amortiguación turbulenta.

4.1.3.- Amortiguamiento Coulombiano.

Este es la conocida fuerza de roce entre dos cuerpos sólidos; la magnitud de la fuerza de fricción es proporcional a un coeficiente (adimensional) de fricción multiplicado por la reacción normal entre los dos cuerpos; en dirección contraria al desplazamiento.

$$F_f = -f \cdot F_N \quad 4.3$$

El coeficiente de fricción será estático si la fuerzas actuantes no logran desplazar a la cuerpo, o cinemático en caso contrario.

4.1.4.- Amortiguamiento Sólido.

También conocido como estructural, de debe al roce interno del mismo material; el esfuerzo y la deformación son proporcionales mientras no se alcance el límite elástico; dentro del tramo elástico, el amortiguamiento estructural es función de la deformación del cuerpo.

4.2.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA VIBRACIÓN AMORTIGUADA.

Supongamos que a nuestro sistema vibratorio le agregamos un amortiguamiento viscoso; aplicando la segunda ley de Newton debe ocurrir por suma de fuerzas en el eje x que para un cuerpo de masa "m", al ser desplazado de su posición de equilibrio una cantidad "x" que:

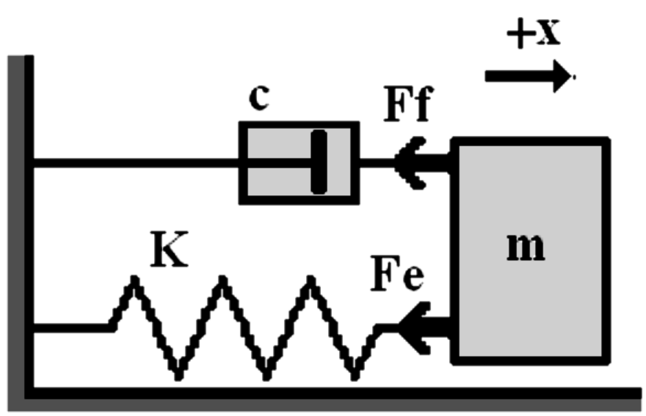

Figura 04-01

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_x \rightarrow -F_f - Fe = m \cdot a_x \rightarrow$$

$$m \cdot a_x + c \cdot v_x + K \cdot x = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = 0 \qquad 4.4$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = 0$$

Nota: La fuerza de amortiguación viscosa es representada dentro de la figura por un diagrama que describiría un pistón que se desplaza dentro de un cilindro con fluido.

4.3.- SOLUCIÓN AL MOVIMIENTO VIBRATORIO AMORTIGUADO.

Aplicando método de ecuación auxiliar, sea $x(t) = A \cdot e^{a \cdot t}$ derivando respecto al tiempo tenemos: $\dot{x}(t) = A \cdot a \cdot e^{a \cdot t}$ y $\ddot{x}(t) = A \cdot a^2 \cdot e^{a \cdot t}$

Sustituyendo estas funciones en la ecuación 4.4, a la cual hemos dividido previamente por la masa, nos queda:

$$A \cdot a^2 \cdot e^{a \cdot t} + \left[\frac{c}{m}\right] \cdot A \cdot a \cdot e^{a \cdot t} + \left[\frac{K}{m}\right] \cdot A \cdot a \cdot e^{a \cdot t} = 0 \rightarrow$$
$$A \cdot e^{a \cdot t} \cdot \left[a^2 + \left[\frac{c}{m}\right] \cdot a + \left[\frac{K}{m}\right]\right] = 0$$

como "$A \cdot e^{a \cdot t}$" no es cero, debe serlo la ecuación de segundo grado; resulta así que la cantidad "a" es:

$$a = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{2m}\right]^2 - \left[\frac{K}{m}\right]}$$

Según la relación entre (c/2m)² y (K/m) se presentan tres posibilidades, que se describen a continuación:

4.3.1.- Vibración Sobre Amortiguada [(c/2m)² > K/m].

En este caso la raíz tiene solución positiva, existen dos valores para la variable "a":

$$a_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left[\frac{c}{2m}\right]^2 - \left[\frac{K}{m}\right]}$$
$$a_1 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left[\frac{c}{2m}\right]^2 - \left[\frac{K}{m}\right]} \quad 4.5$$

La solución corresponde a la suma de dos funciones exponenciales negativas. No se presenta ningún periodo; y la solución tiende a cero cuando el tiempo es infinito.

$$x = A_1 \cdot e^{a_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{a_2 \cdot t} \quad 4.6$$

comportamiento de una partícula sobre-amortiguada para distintas velocidades iniciales (vo) y posiciones iniciales (xo) es ilustrado en la figura inferior:

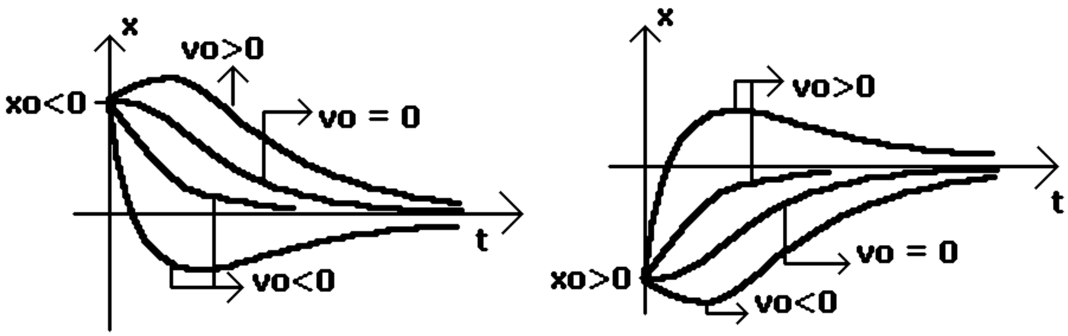

Figura 4.2

Según las condiciones iniciales de velocidad, la partícula pasara por el origen como máximo una sola vez.

4.3.2.- Vibración Críticamente amortiguada. [$(c/2m)^2 = K/m$].

En este caso el termino de la raíz se vuelve nula; luego $a_1 = a_2$, tendríamos en este caso una sola solución exponencial.

$$x_1(t) = A \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t}$$

Una sola solución no es capaz de satisfacer las condiciones iniciales de una ecuación diferencial de segundo orden; debe existir por lo tanto una segunda solución. La segunda solución se obtiene aplicando la **Regla de Modificación**, que establece:

> *"Si la solución de una ecuación diferencial de orden "m" solo presenta "n" soluciones al aplicar el método de coeficientes indeterminados (ecuación auxiliar) donde n<m; las "m-n" soluciones restantes se obtienen al multiplicarse la solución general por la variable de la función elevada a "m-n" exponentes a partir de la unidad".*

En este caso, como m=2 y n=1, tenemos que la solución faltante es:

$$x_2(t) = C \cdot [x_1(t)] \cdot t^{2-1} = B \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t}$$

Luego la solución final tiene la forma:

$$x(t) = [A + B \cdot t] \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \quad 4.7$$

El comportamiento de unas partículas críticamente amortiguada no difiere significativamente de las sobre amortiguadas

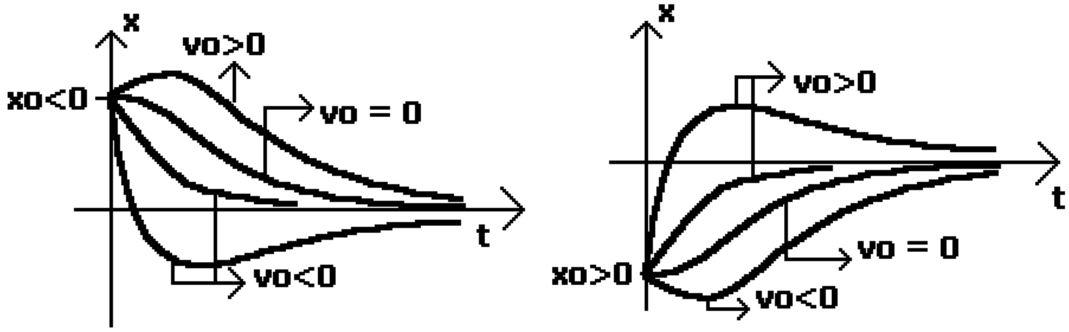

Figura 04-03

4.3.3.- Vibración ligeramente amortiguada. [(c/2m)² < K/m].

En este caso la raíz es negativa, dando una respuesta compleja; la parte real corresponde con una función exponencial decreciente; mientras que la parte imaginaria, como recordaremos del tema de movimiento armónico simple, es la suma de funciones seno y coseno de diferente amplitud (ver tema 1); por tanto sea:

$$q = \sqrt{\left[\frac{K}{m}\right] - \left[\frac{c}{2m}\right]^2} \quad 4.8$$

Entonces la solución toma las formas de:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(q \cdot t) + B \cdot sen(q \cdot t)] \quad 4.9 \\ x(t) &= e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot [Ao \cdot sen(q \cdot t + \phi)] \end{aligned}$$

Según se prefiera trabajar con fase de inicio (ϕ) o no. Es importante destacar en este tipo de movimiento que **existe un periodo de oscilación** (cosa que no ocurre con las otras dos soluciones); el cual se caracteriza por ser: independiente de las condiciones iniciales y ser **mayor que el periodo natural (ωo)**. En el periodo de la vibración ligeramente amortiguada viene dada por:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{q} \quad 4.10$$

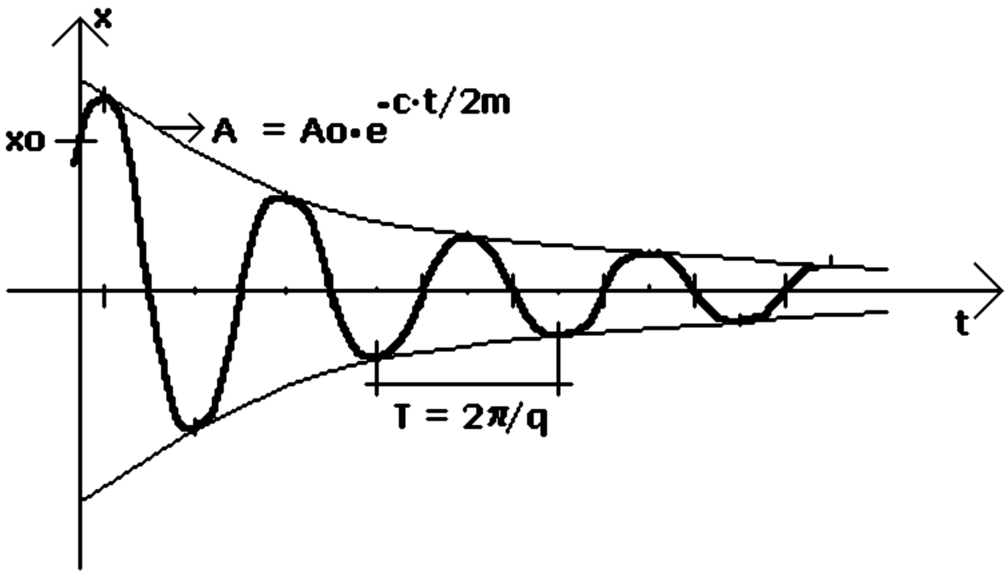

Figura 04-04

REFERENCIAS

1.- **FÍSICA. Volumen I. Mecánica**.
Marcelo Alonso y Edward J. Finn.
Addison - Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.

2.- **VIBRACIONES Y ONDAS. Curso de Física del M.I.T.**
A.P. French.
Editorial Reverte, S. A. España. 1982.

3.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Dinámica.**
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston.
Libros McGrall-Hill. México 1979.

4.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Volumen II. Dinámica**.
Harry R. Nara.
Editorial Limusa. México 1979.

5.- **MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA. Volumen 1**.
Erwin Kreyszig.
Editorial Limusa. México 1981.

6.- **CALCULUS. Volumen 1.**
Tom M. Apostol.
Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. 1982.

7.- **FÍSICA GENERAL. Volumen I.**
Douglas C., Ginacoli.
Prentice - Hall hispanoamericana, S.A. México 1988.

8.- **FÍSICA tomo I.**
Paul A. Tipler.
Editorial Reverte, S.A. Colombia 1990.

9.- **FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y DE LA SALUD.**
Simon G. G. MacDonald. Y Desmond M. Burns.
Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1978.