VIBRACIONES ANARMÓNICAS

OBJETIVOS:

Al finalizar el tema el estudiante ha de estar en capacidad de reconocer a una vibración anarmónica y determinar en los casos que se permita el periodo natural de vibración. Para ello el estudiante ha de ser capaz de:

- Reconocer la ecuación diferencial de una vibración anarmónica
- Dada una gráfica de energía potencial contra posición, explicar el comportamiento oscilatorio de partícula en un determinado tramo de la gráfica.
- Determinar el periodo de oscilación, para oscilaciones anarmónicas pequeñas.

3.1.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ANARMÓNICO.

Las fuerzas elásticas (o de restitución) de resortes no se comportan necesariamente siguiendo a la Ley de Hooke en forma exacta, $(F = K \cdot \Delta x = K \cdot (x - xo))$; muchos resortes utilizan magnitudes de fuerza ligeramente diferente para producir un alargamiento o una compresión constante, en estos caso las ecuaciones suelen ser de la forma:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + K_1 \cdot \Delta x + K_2 \cdot \Delta x^2 &= 0 \; (\text{resorte lineal asimetrico}) \\ m \cdot \ddot{x} + K_1 \cdot \Delta x + K_3 \cdot \Delta x^3 &= 0 \; (\text{resolte lineal simetrico}) \end{aligned} \qquad 3.1$$

Estas ecuaciones incluyen un tercer término que afecta la fuerza que se aplica sobre el resorte. No debemos olvidar que las fuerzas elásticas de los resortes representan son función del desplazamiento (Δx = x–xo) y no de la posición (x). Este tipo de ecuaciones diferenciales no solo se presentan en resortes, también ocurre si trabajamos con la expresión exacta del péndulo simple, la ecuación diferencial que describe este movimiento, sin aproximación de la función seno puede ser escrita como una serie de potencias, como veremos más adelante y trasforma la expresión anterior a la forma:

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{a_g}{L}\right] \cdot sen\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \left[\frac{a_g}{L}\right] \cdot \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...\right] = 0 \qquad 3.2$$

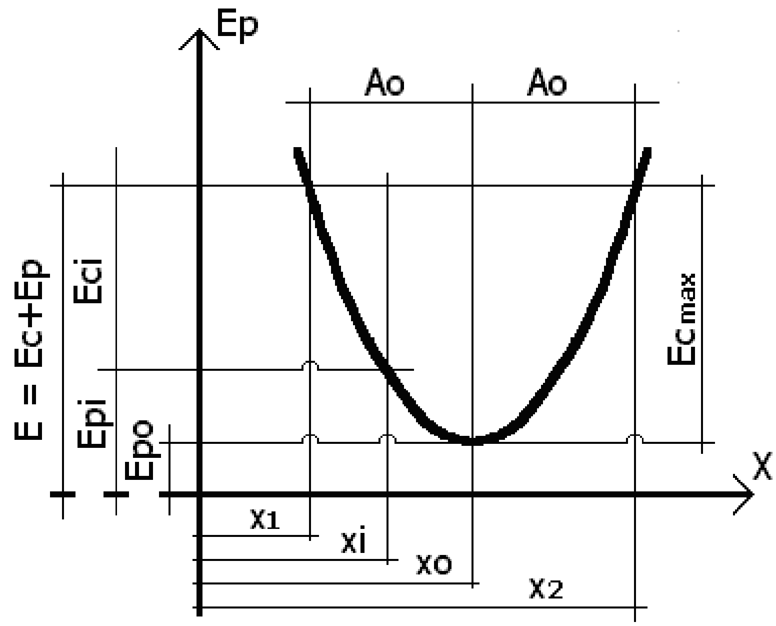
Si buscamos una solución de la forma $Ao \cdot sen(\omega \cdot t + \phi)$ para estos casos, tenemos que esta no es solución de este tipo de ecuaciones diferenciales. En forma general podemos concluir que la ecuación diferencial que describe un movimiento anarmónico tiene la forma:

$$m \cdot \ddot{x} + K_1 \cdot \Delta x + K_2 \cdot \Delta x^2 + K_3 \cdot \Delta x^3 + ... = 0$$
$$m \cdot \ddot{x} + K_1 \cdot (x - xo) + K_2 \cdot (x - xo)^2 + K_3 \cdot (x - xo)^3 + ... = 0$$
$$m \cdot \ddot{x} + \sum_{i=1}^{\infty} K_i \cdot [x - xo]^i = 0 \qquad 3.3$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty} K_i \cdot [x - xo]^i = m \cdot a = F$$

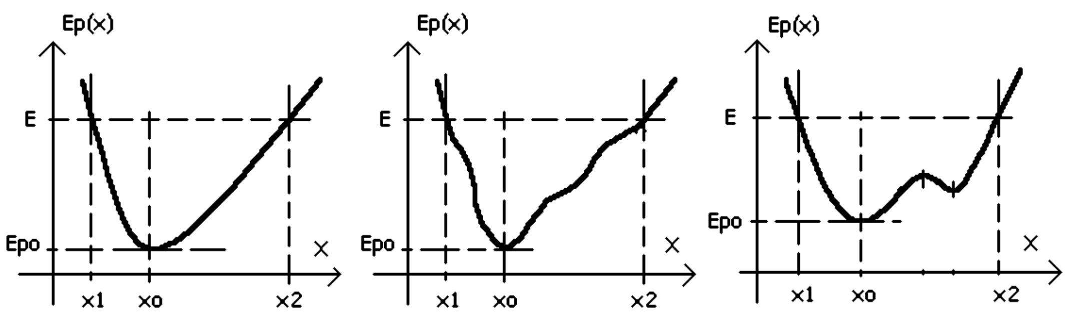
El valor de "xo" corresponde en los resortes a la posición de equilibrio, la cual es generalmente cero en la mayoría de los casos. Si a la expresión 3.3 se eliminan todos los términos Ki, salvo el primero (K_1), tendríamos el correspondiente al movimiento armónico; el resto de las cantidades presentes en la ecuación (K_2, K_3. K_4. ...) corresponden a los términos anarmónicos.

3.2.- MOVIMIENTO ANARMÓNICO Y LAS GRÁFICAS DE ENERGÍA.

Un movimiento armónico simple se puede explicar haciendo uso de sus curvas de energía potencial, se observa en ellas que movimientos anarmónicos no difieren significativamente del comportamiento descrito en un movimiento armónico. Lo que más varia en las mismas son las condiciones límites, esto es: que la distancias x_1 y x_2 respecto al punto de equilibrio (xo) no son necesariamente iguales; puede ocurrir lo mismo con los valores de las fuerzas conservativas presentes en las distintas posiciones; se pueden presentar caso donde existan más de una posición de equilibrio (cuando existen varios mínimos o máximos relativos en la curva); finalmente incluso se pueden dar cambios de curvatura en la gráfica que afecten la magnitud de la fuerza conservativa, la cual no se incrementa o reduce en forma continua en el tramo, sino que hay tramos donde ocurren ambas situaciones.



Curva de Energía Potencia contra distancia en un Movimiento Armónico Simple con Epo y xo distintos de cero.



Curvas de Energía Potencial en vibraciones anarmónicas

Figura 03-01

3.3.- SOLUCIÓN POR SERIES.

3.3.1.- ¿Qué son las series?.

Una herramienta matemática útil en la resolución de ecuaciones diferenciales son las series; una serie constituye una suma infinita de términos que se generan siguiendo una determinada regla. Las series pueden ser convergente en un intervalo real determinado cuando existe límite a la suma, o en caso contrario son divergentes.

Ilustremos esto con un problema planteado en la antigüedad por el filosofo Zenón; conocido como paradoja del corredor; que se puede exponer de la siguiente forma:

> *"Un Corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que correr la otra mitad; cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará la cuarta parte; cuando haya recorrido la mitad de esta cuarta parte le quedará la octava parte y así sucesivamente."*[1]

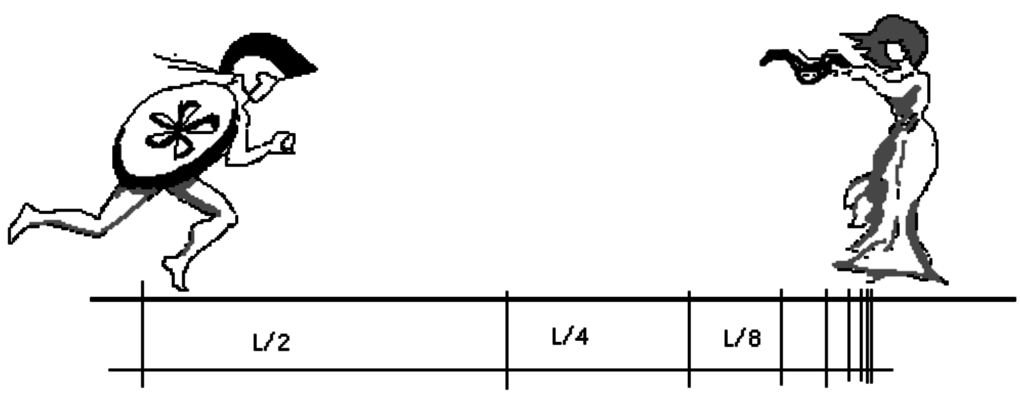


Figura 03-02

Según el planteamiento del problema, se supone que el corredor es una partícula adimensional, y Zenón planteaba que la suma de un infinito número de partes no puede ser finita. Sin embargo esto no es siempre cierto y para este caso es fácilmente de demostrar aplicando algunos conocimientos de cinemática; si el corredor viaja a velocidad constante, entonces sea "t" es el tiempo que tarda en recorrer la primera mitad, el tiempo que tarda en recorrer la totalidad de la separación debe ser "2t". Por lo tanto:

[1] Extraido de: **CALCULUS. Volumen 1**. *Tom. M. Apostol*. Segunda Edición. Editorial Reverte S.A. España 1982. pag.457.

$$t+\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty} t\cdot 2^{-i}=2\cdot t \quad 3.4$$

La serie generada por la paradoja de Zenón es convergente. No así toda serie donde los términos sumados sean cada vez más pequeños son convergentes, la convergencia en series obedece a reglas que escapan a la naturaleza del curso.

3.3.2.- Aproximación de Funciones por Series de Potencias.

Los polinomios figuran entre las funciones más sencillas; y son fáciles de derivar e integrar. Las series de polinomios más comunes son las Series de Potencias, que tiene la forma:

$$y(x)=a_0+a_1\cdot[x-xo]+a_2\cdot[x-xo]^2+a_3\cdot[x-xo]^3+...=\sum_{i=o}^{\infty} a_i\cdot[x-xo]^i \quad 3.5$$

Existen muchas formas de aproximar una función (f(x)) a una series de polinomios; si se conocen en x = xo el valor de esta función y sus "n" derivadas entonces derivando tenemos:

$$f(x)=y(x)=a_0+a_1\cdot[x-xo]+a_2\cdot[x-xo]^2+a_3\cdot[x-xo]^3+...$$
$$f(x)'=y(x)'=a_1+\frac{a_2}{2}\cdot[x-xo]+\frac{a_3}{3}\cdot[x-xo]^2+\frac{a_4}{4}[x-xo]^3+...$$
$$f(x)''=y(x)''=\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3\cdot 2}\cdot[x-xo]+\frac{a_4}{4\cdot 3}[x-xo]^2+\frac{a_5}{5\cdot 4}[x-xo]^3+...$$

y así sucesivamente; evaluando la función y sus "n" derivadas, en "xo" podemos determinar que valores de los coeficientes constantes obedecen a la expresión:

$$a_i=\frac{f(xo)^i}{i!} \quad 3.6$$

Las serie de potencias definida por:

$$y(x) = \frac{f(xo)}{0!} + \frac{f(xo)'}{1!} \cdot [x - xo] + \frac{f(xo)''}{2!} \cdot [x - xo]^2 + \frac{f(xo)'''}{3!} \cdot [x - xo]^3 + \ldots$$
$$y(x) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{f(xo)^i}{i!} \cdot [x - xo]^i \qquad 3.7$$

Se conoce como **<u>Serie de Taylor</u>** y es una herramienta útil para determinar aproximaciones a soluciones de ecuaciones diferenciales, integrales y derivadas de una función; cuando el intervalo alrededor del punto "xo" es pequeño, entonces la función se puede aproximar a:

$$y(x) = \frac{f(xo)}{0!} + \frac{f(xo)'}{1!} \cdot [x - xo] \qquad 3.8$$

3.3.3.- El Periodo a partir de la Energía Potencial.

La fuerza que actúa en un movimiento anarmónico la podemos despejar de la expresión 3.3; donde por definición de energía potencial tenemos que:

$$F = -\frac{dEp}{dx} \rightarrow F \cdot dx = -dEp \rightarrow$$
$$\int_{Epo}^{Ep} -dEp = \int_{xo}^{x} -\left[K_1 \cdot (x - xo) + K_2 \cdot (x - xo)^2 + K_3 \cdot (x - xo)^3 + \ldots\right] dx \rightarrow$$

$$Ep = Epo + \frac{1}{2} K_1 (x - xo)^2 + \frac{1}{3} K_2 \cdot (x - xo)^3 + \frac{1}{4} K_3 \cdot (x - xo)^4 + \ldots \qquad 3.9$$

Comparando esta expresión (3.9) con la serie de Taylor (3.7) resulta que $K_1 = Ep''(xo)$; y dado que K_1 es el término armónico podemos aproximar el periodo del movimiento anarmónico a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{Ep(xo)''}} \qquad 3.10$$

Otro mecanismo para determinar el periodo del movimiento anarmónico es recordando que mitad del periodo se tiene cuando la partícula va de "x_1" a "x_2"; luego el periodo del movimiento anarmónico viene dado por:

$$E = Ec + Ep(x) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = E - Ep(x) \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - Ep(x)]} \rightarrow$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - Ep(x)]}} \rightarrow$$

$$\int dt = \frac{T}{2} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot dx}{\sqrt{[E - Ep(x)]}} \right] \rightarrow$$

$$T = \sqrt{2m} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dx}{\sqrt{[E - Ep(x)]}} \right] \quad 3.11$$

3.3.4.- Series de Fourier.

Existe casos donde se destaca la periodicidad en el movimiento. Los movimientos anarmónico, como en los armónico, presentan un periodo característico (T), luego si la solución es periódica y por ello debe cumplir con la condición:

$$x(t)? = x(t + T) \quad 3.12$$

Las funciones seno y coseno satisfacen esta condición cabalmente; podemos suponer que la respuesta de un movimiento anarmónico es la suma de dos o más vibraciones armónicas de diferente frecuencia angular. Como debe ocurrir que el periodo del movimiento es uno solo, y como las diferentes frecuencias angulares deben estar relacionadas de forma entera; debe existir una frecuencia **angular fundamental**. El resto de las frecuencias angulares son conocidas como **<u>frecuencias angulares armónicas o sobre tonos</u>**.

La vibración anarmónica tendrá por solución la suma de MAS todos con frecuencias que son múltiplos de una frecuencia primera, siendo la respuesta de la forma:

$$x(t) = a_o + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \cos(i \cdot \omega_o \cdot t) + b_i \cdot sen(i \cdot \omega_o \cdot t) \qquad 3.13$$

$$\text{donde} : \omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

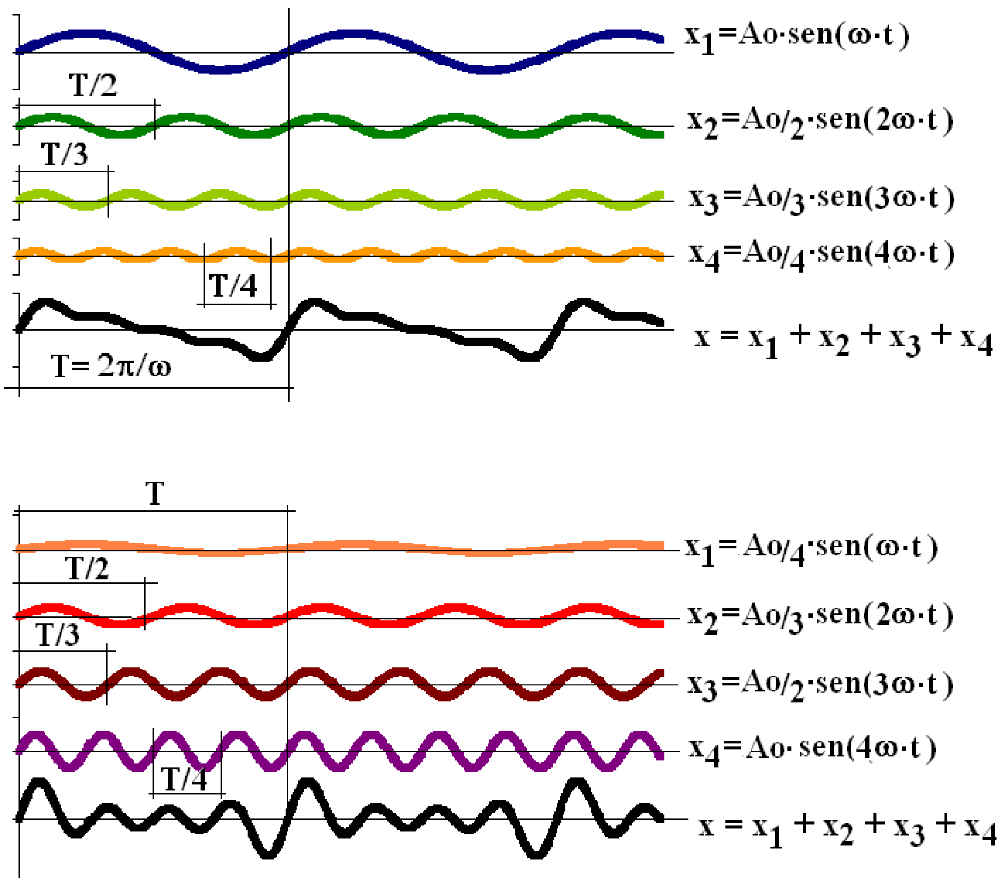


Figura 03-03

Lo anterior se conoce como Series de Fourier de periodo "T" y donde las cantidades "ao", "ai" y "bi" vienen definidas por las siguiente expresiones para funciones de periodo "T" y frecuencia angular fundamental "ωo"o (omitiremos el origen de la expresiones ya que estas escapan al alcane del curso):

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\cdot dt$$

$$a_i = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \cos(i\cdot\omega_o\cdot t)\cdot f(t)\cdot dt \qquad 3.14$$

$$b_i = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} sen(i\cdot\omega_o\cdot t)\cdot f(t)\cdot dt$$

3.4.- NOCIONES DE TRABAJO Y ENERGÍA. (TEMA COMPLEMENTARIO).

Se define como trabajo al producto escalar de la fuerza que actúa sobre un cuerpo y el desplazamiento experimentado por el mismo:

$$\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = F\cdot ds\cdot\cos(\theta) \qquad 3.15$$

Siendo "θ" el ángulo entre el vector fuerza y el vector desplazamiento. Como el producto $F\cdot\cos(\theta) = m\cdot a_{\text{tangente}} = m\cdot(dv/dt)$ representa la componente tangente de fuerza (componente paralela a la velocidad), entonces el trabajo de una fuerza es:

$$\delta W = m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot ds \rightarrow$$

$$\delta W = m\cdot dv\cdot\frac{ds}{dt} = m\cdot dv\cdot v = m\cdot v\cdot dv$$

Integrando desde una velocidad inicial a una velocidad final se tiene

$$\int \delta W = \int_{vi}^{vf} m \cdot v \cdot dv \rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m \cdot vf^2 - \frac{1}{2} m \cdot vi^2 \rightarrow$$

$$W = Ec_f - Eci = \Delta Ec \quad 3.16$$

Sea la energía cinética de una partícula de masa "m" la cantidad “$\frac{1}{2} m \cdot v^2$”, entonces el trabajo realizado por una fuerza entre dos puntos es igual al cambio de energía cinética de la partícula; ello constituye lo que se conoce como **Principio de Trabajo y Energía.**

El trabajo efectuado por fuerzas conservativas (aquellas que dependen o son función únicamente de la posición del cuerpo) también puede ser expresado en función de una cantidad escalar conocida como energía potencias. El caso de las fuerza en resortes, que son proporcionales y opuesta al desplazamiento, ilustran esta situación y se tiene al integrar desde una posición inicial a una posición final que:

$$\int \delta W = \int_{xi}^{xf} K \cdot x \cdot dx \cdot \cos[180^0] \rightarrow$$

$$W = -\frac{1}{2} K \cdot xf^2 + \frac{1}{2} K \cdot xi^2 \rightarrow$$

$$W = Epi - Epf = -\Delta Ep \quad 3.17$$

Definiendo la energía potencial como una función que sólo depende de la posición, entonces sea $\frac{1}{2} K \cdot x^2$ la energía potencial de un resorte de constante elástica “K” se observa que el trabajo realizado por fuerzas conservativas es igual y opuesto al cambio de energía potencial. Como trabajo es fuerza por desplazamiento, debe ocurrir (en el caso unidimensional) que:

$$\delta W = F \cdot dx = -dEp \rightarrow$$

$$F = -\frac{dEp}{dx} \quad 3.18$$

Las fuerzas conservativas tienen por magnitud en una determinada posición el valor la derivada de la energía potencial respecto a la posición en dicho punto; y también tienen como característica que el trabajo efectuado en un circuito cerrado por una fuerza conservativa es nulo. Por otro lado sí solo actúan fuerzas conservativas entonces:

$$W = \Delta Ec = -\Delta Ep \rightarrow$$

$$W = Ecf - Eci = Epi - Epf \rightarrow$$

$$Eci + Epi = Ecf + Epf \rightarrow$$

$$Ei = Ef = Ep + Ec = Constante \quad 3.19$$

Ello representa el **<u>Principio de Conservación de la Energía Mecánica</u>**, donde para una partícula sobre la cual actuún fuerzas conservativas únicamente la suma de su energía potencial y energía cinética es constante en el tiempo. Esta constante constituye la energía de la partícula, siendo la energía la capacidad de dicha partícula de poder efectuar trabajo

3.5.- SERIES DE POLINOMIOS DE LAS FUNCIONES MÁS COMUNES.

Serie del seno $$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Serie del Coseno $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Serie del exponente natural $$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Logaritmo natural $$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - ...$$

Serie del Binomio $$(a+b)^n = \Sigma \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot a^{n-i} \cdot b^1$$

REFERENCIAS

1.- **FÍSICA. Volumen I. Mecánica**.
Marcelo Alonso y Edward J. Finn.
Addison - Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.

2.- **VIBRACIONES Y ONDAS. Curso de Física del M.I.T.**
A.P. French.
Editorial Reverte, S. A. España. 1982.

3.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Dinámica.**
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston.
Libros McGrall-Hill. México 1979.

4.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Volumen II. Dinámica**.
Harry R. Nara.
Editorial Limusa. México 1979.

5.- **MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA. Volumen 1**.
Erwin Kreyszig.
Editorial Limusa. México 1981.

6.- **CALCULUS. Volumen 1.**
Tom M. Apostol.
Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. 1982.

7.- **FÍSICA GENERAL. Volumen I.**
Douglas C., Ginacoli.
Prentice - Hall hispanoamericana, S.A. México 1988.

8.- **FÍSICA tomo I.**
Paul A. Tipler.
Editorial Reverte, S.A. Colombia 1990.

9.- **FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y DE LA SALUD.**
Simon G. G. MacDonald. Y Desmond M. Burns.
Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1978.