MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

OBJETIVOS:

Al finalizar el tema, el estudiante ha de estar en capacidad de determinar el periodo de un movimiento armónico simple; para ello ha de ser capaz de:

- Establecer: por medio de análisis dinámico o por métodos de trabajo y energía, la ecuación fundamental del movimiento armónico simple en situaciones mecánicas.
- Dada la ecuación fundamental y las condiciones iniciales, establecer la expresión que describe el movimiento. Determinar: posición, velocidad, aceleración, amplitud, fase de inicio u otro dato; según la información que se requiera para describir, en un momento dado, el comportamiento de una partícula en movimiento armónico simple.
- Determinar el periodo y frecuencia angular para distintas situaciones que involucren movimientos armónicos.
- Para distintas combinaciones de resortes (en serie, paralelo o ambas), determinar la constante elástica equivalente, las fuerzas y deformaciones en cada resorte.

1.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

1.1.1. Ecuación Fundamental.

El modelo más simple de los movimientos vibratorios es conocido como ***Movimiento Armónico Simple***; o lo que es igual, ***movimiento vibratorio libre no amortiguado***. Este tipo de situación se presenta cuando un cuerpo oscila de manera uniforme alrededor de su posición de equilibrio; ilustremos con el siguiente ejemplo:

Un cuerpo de masa "m" reposa sobre una superficie horizontal y esta ubicada inicialmente en el reposo en una posición "xo", una fuerza externa desplaza el cuerpo, sin fricción, hasta una posición final "x", donde la fuerza externa se equilibra con la fuerza elástica del resorte. Si se suprime la fuerza externa, entonces debe ocurrir que en el eje "y" la fuerza del peso se equilibra con la reacción normal de la superficie; mientras que en el eje "x" la única fuerza actuante es la fuerza elástica que obedece la ley de Hooke, esto es que es proporcional a la deformación; sea "K" la constante elástica de proporción tenemos:

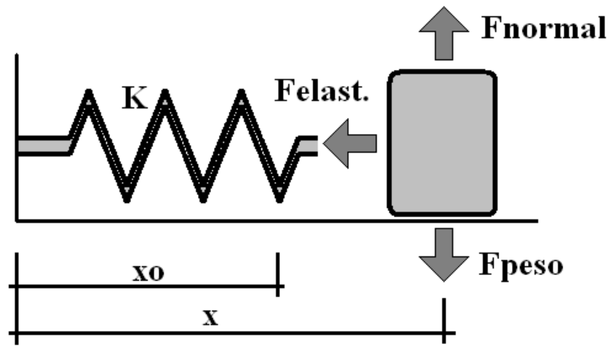

Figura 01-01

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_x \rightarrow$$
$$-F_{elastica} = -K \cdot (x - xo) = -K \cdot \Delta x = m \cdot a_x$$

Si asumimos que la posición de equilibrio "xo" es igual a cero, entonces la expresión anterior toma la forma siguiente, recordando que la aceleración en el eje x es la segunda derivada de la posición x:

$$m \cdot a + K \cdot x = 0 \rightarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$$

Dado que "K" y "m" son constantes positivas, podemos reemplazar la cantidad (K/m) por por el termino ω^2; resultando lo que denominaremos ***Ecuación del Movimiento Armonico Simple (MAS).***

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad 1.1$$

1.1.2. Solución de la Ecuación Diferencial. (Método de la Ecuación Auxiliar).

Constituyen ecuaciones diferenciales aquellas donde aparecen combinadas funciones y sus derivadas; el resolver ecuaciones diferenciales consiste en determinar las funciones que satisfagan la ecuación y las condiciones planteadas.

Un ejemplo simple de ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas por el método de la separación de variables es la siguiente:

$$\dot{x} + a \cdot x = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} + a \cdot x = 0$$

Separando variables e integrando a ambos lados desde xi hasta x y desde ti hasta t tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = -a \cdot x \rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -a \cdot dt \rightarrow$$

$$\int_{xi}^{x} \frac{dx}{x} = -a \int_{ti}^{t} dt \rightarrow$$

$$\ln(x) - \ln(xi) = -a \cdot (t - ti) \rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x}{xi}\right) = -a \cdot (t - ti) \rightarrow$$

$$x = xi \cdot e^{-a \cdot (t - ti)} = A \cdot e^{-a \cdot t} + B$$

A partir de este resultado podemos concluir:

- La ecuación de primer orden (la función x(t) solo aparece derivada una sola vez) presenta dos soluciones, la primera es una solución particular, mientras que el segundo termino constituye una solución general.
- Las ecuaciones diferenciales que involucran la función y su derivada tienen por respuesta una forma exponencial.

Aplicando esta segunda conclusión podemos resolver la ecuación diferencial (1.1); entonces sea:

$$x(t) = x = A \cdot e^{a \cdot t} \rightarrow \text{derivando resulta} \rightarrow \dot{x} = A \cdot a \cdot e^{a \cdot t} \rightarrow \ddot{x} = A \cdot a^2 \cdot e^{a \cdot t}$$

Remplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$A \cdot a \cdot e^{a \cdot t} + \omega^2 \cdot A \cdot e^{a \cdot t} = 0 \rightarrow$$

$$A \cdot e^{a \cdot t} \cdot [a^2 + \omega^2] = 0$$

Como el exponente es para todo número real distinto de cero, la cantidad "A" si es cero no representa ninguna solución, entonces solo puede ser cero la cantidad ($a^2+\omega^2$), resultando que la cantidad "a" es:

$$a^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega \cdot \sqrt{-1} \rightarrow a = \pm\omega \cdot i$$

Donde resulta que la solución de la ecuación 1.1 tiene respuesta en la función exponencial de números imaginarios.

$$x(t) = x = A_1 \cdot e^{+\omega \cdot i \cdot t} + A_2 \cdot e^{-\omega \cdot i \cdot t} \quad 1.2$$

1.1.3.- Naturaleza del Exponente Imaginario.

Los números imaginarios tienen su origen en la solución algebraica de las raíces negativas de orden par; la unión de los números reales e imaginarios constituye los números complejos; si los números reales representan geométricamente todos los puntos de una recta (eje x), por lógica los números complejos deben representar todos los puntos de un plano. Según esto si "z" es un número complejo, donde "x" es la componente real; mientras que "y" la componente imaginaria, entonces:

$$z = x + y \cdot i \quad 1.3$$

Siendo "i" la unidad imaginaria; podemos también representar a los números complejos en una forma polar como:

$$z = r[\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)] \quad 1.4$$

El eje imaginario "y" está gráficamente girado 90º con respecto al eje real "x", entonces <u>la unidad imaginaria "i" representa un giro de 90º en sentido antihorario respecto al eje real</u>.

En base a esta sugerencia de la naturaleza geométrica de la unidad imaginaria podemos demostrar que $i^2 = -1$. Sea un número real "x" al multiplicarlo por la unidad imaginaria "i" lo que hacemos es girar este punto hasta cortar con el eje Y, al multiplicar por segunda vez la unidad imaginaria habremos girado 180º, obteniendo el punto "-x"; luego se satisface la definición de la unidad imaginaria.

El exponente imaginario debe tener como respuesta a un número complejo; y representa la unión más asombrosa entre la geometría (trigonometría) y el álgebra; esta relación se obtiene por medio del uso de series de polinomio (ver tema n°3) y se conoce como ***Fórmula de Euler***; que establece:

$$e^{\theta \cdot i} = \cos(\theta) + i \cdot sen(\theta) \quad 1.5$$

La interpretación geométrica de esta identidad es la de una rotación positiva de un ángulo "θ". Aplicando esta entidad, la solución 1.2 se transforma en:

$$x = A_1 \cdot [\cos(+\omega \cdot t) + i \cdot sen(+\omega \cdot t)] + A_2 \cdot [\cos(-\omega \cdot t) + i \cdot sen(-\omega \cdot t)] \rightarrow$$
$$x = [A_1 + A_2] \cdot \cos(\omega \cdot t) + [A_1 - A_2] \cdot i \cdot sen(\omega \cdot t)$$

Recordemos que: $\cos(-\omega \cdot t) = \cos(+\omega \cdot t)$ y $sen(-\omega \cdot t) = -sen(\omega \cdot t)$. Dado que (A1+A2) y (A1–A2)·i son números (que pueden ser complejos), la solución real que satisface a la ecuación diferencial 1.1 es en definitiva:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot sen(\omega \cdot t) \quad 1.6$$

1.1.4.- Los Vectores Rotatorios.

Uno de los procedimientos más útiles para describir el movimiento armónico simple es a través del uso de vectores rotatorios. Esto supone a un vector de determinada magnitud que gira respecto a su origen con una velocidad angular constante. La proyección de la punta ese vector sobre uno de los ejes de coordenadas define la posición de una partícula que experimenta el movimiento armónico simple.

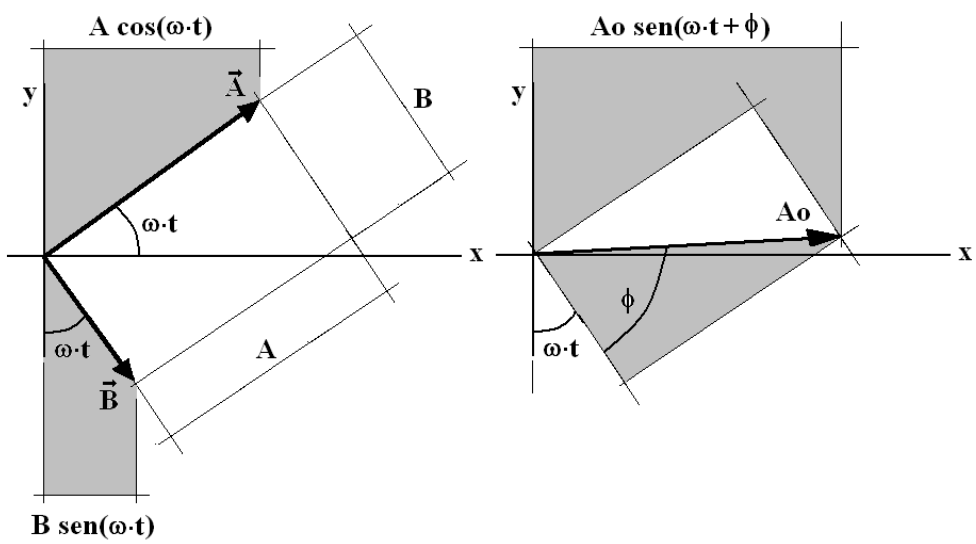

Figura 01-02

La suma de dos vectores rotatorios $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que giran con igual velocidad angular es un vector rotatorio que tiene por magnitud la cantidad "Ao" denominada amplitud del movimiento armónico simple (MAS). El vector resultante gira con respecto a su origen a una velocidad angular "ω"; igual a la frecuencia angular del movimiento armónico (en radianes/segundo) y tiene un ángulo de fase "ϕ" que se conoce como fase de inicio. De esto resulta una nueva solución para el movimiento Armónico simple que tiene la forma:

$$x(t) = x = Ao \cdot sen(\omega \cdot t + \phi) \quad 1.7$$

Como los vectores A y B forman entre sí un ángulo de 90º, la amplitud y la fase de inicio del movimiento armónico simple están dadas por:

$$Ao = +\sqrt{A^2 + B^2} \quad 1.8$$

y

$$tang(\phi) = \frac{A}{B} \quad 1.9$$

No hay que olvidar, que las funciones seno y coseno son idénticas; salvo por una diferencia de la fase inicial, $\cos(\omega \cdot t) = sen(\omega \cdot t + \pi/2) \leftrightarrow sen(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t - \pi/2)$.

Derivando la expresión 1.7 obtenemos la rapidez y celeridad del movimiento armónico simple:

$$v_x = \dot{x} = Ao \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) = v_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \quad 1.10$$

y

$$a_x = \ddot{x} = -Ao \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \phi) = -a_{\max} \cdot sen(\omega \cdot t + \phi) \quad 1.11$$

En caso de desconocer la amplitud y la fase de inicio, pero conociendo las condiciones iniciales (t = to = 0) para la posición (xi) y la rapidez inicial (vi) es posible realizar un sistema de ecuaciones con las expresiones 1.10 y 1.11, donde resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

$$xi = Ao \cdot sen(\phi) \quad \text{y} \quad vi = Ao \cdot \omega \cdot \cos(\phi) \rightarrow$$

$$Ao = +\sqrt{xi^2 + \left[\frac{vi}{\omega}\right]^2} \quad 1.12$$

y

$$tang(\phi) = \frac{xi \cdot \omega}{vi} \quad 1.13$$

El tiempo que tarda en realizarse una oscilación completa define al periodo del movimiento armónico simple (T). La relación con la frecuencia angular (ω) esta dada por una simple regla de tres, recordando que las funciones seno y coseno son periódicas cada 2π radianes; entonces:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad 1.14$$

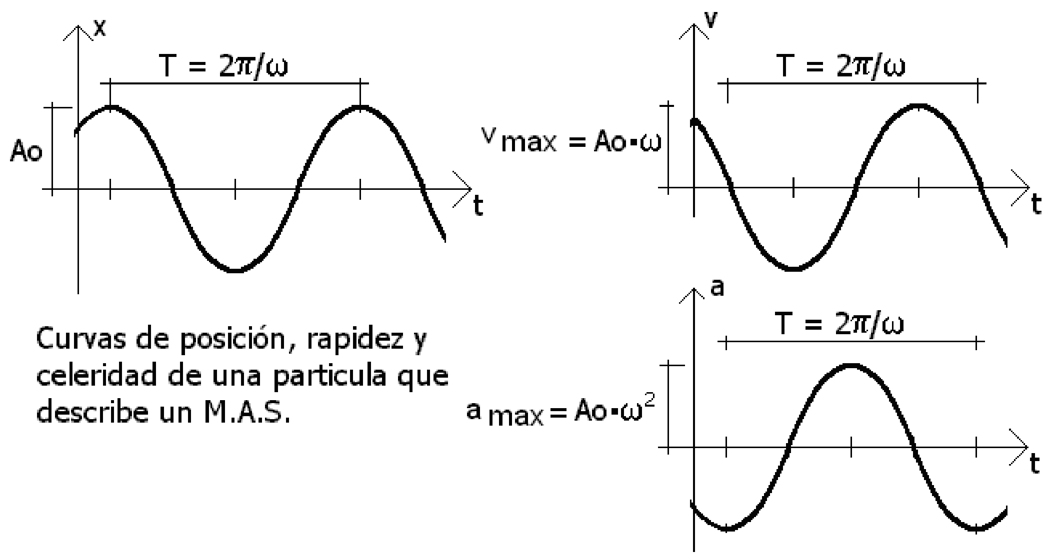

Figura 01-03

Notas importantes:

1. Ao es un valor siempre positivo (A y B pueden ser positivos o negativos en la expresión 1.6).
2. La fórmula 1.12 es siempre valida.
3. La formula 1.13 sólo funciona bien cuando xi y vi son positivos ambos.

1.2. EJEMPLOS DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES.

1.2.1. Masas unidas a resortes de masa despreciable.

Este caso ya lo planteamos al inicio del tema, nos permitió definir la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico simple y su periodo viene dado por:

$$T = +\sqrt{\frac{K}{m}} \quad 1.15$$

1.2.2. El Péndulo Simple.

Se define como péndulo simple, un cuerpo de masa (m), la cual se considera puntual (partícula), que esta atada a una cuerda de longitud definida (L) y que es deslizada (manteniendo la tensión de la cuerda) describiendo un arco de circunferencia una distancia (s) respecto a su posición de equilibrio.

Observando la figura 1.4, se pueden observar que las fuerzas actuantes, despreciando las fuerzas de fricción, son solo la tensión de la cuerda y el peso del cuerpo. Por suma de fuerzas a lo largo del eje Y, dado que el cuerpo no sube ni baja en dicho eje debe ocurrir:

$$\overset{+}{\nwarrow} \Sigma Fy = 0 \rightarrow m \cdot a_g \cdot \cos(\theta) = F_{Tensión}$$

Mientras que en el eje X tenemos:

$$\overset{+}{\nearrow} \sum Fx = m \cdot a_x \rightarrow$$

$$m \cdot a_x + m \cdot a_g \cdot sen(\theta) = 0 \rightarrow$$

$$a_x + a_g \cdot sen(\theta) = 0$$

Cuando el ángulo es pequeño, entonces el $sen(\theta) \simeq \theta$; y como la aceleración actuante es la aceleración tangente, entonces por relación con el movimiento circular debe ocurrir que $a_x = L \cdot \alpha$; siendo "α" la aceleración angular. Acomodando términos resulta la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple:

$$\alpha + \left[\frac{a_g}{L}\right] \cdot \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \left[\frac{a_g}{L}\right] \cdot \theta = 0 \quad 1.16$$

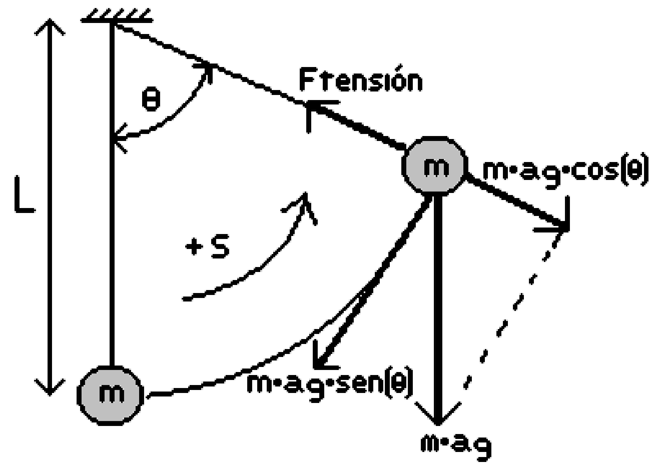

Figura 01-04

Donde el periodo viene dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{a_g}} \quad 1.17$$

Esta aproximación es valida solo para ángulos menores de 20º, siendo en estos casos el error presente inferior al 1%; para ángulos mayores no es conveniente aplicarla.

1.2.3. El Péndulo Compuesto o Péndulo físico.

Un péndulo compuesto es cualquier sólido rígido que oscila libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad.

Suponiendo una rotación horizontal respecto a un eje que sale del papel, el cual llamaremos eje Z; entonces por dinámica de rotación, la única fuerza que ejerce torque es el peso; el cual actúa en el centro de masa del cuerpo; sea la distancia entre el eje de giro y el centro de rotación igual a "b", tenemos:

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum Mzo = Io \cdot \alpha \rightarrow$$

$$Io \cdot \alpha = -m \cdot a_g \cdot b \cdot sen(\theta)$$

$$Io \cdot \alpha = -m \cdot a_g \cdot b \cdot sen(\theta)$$

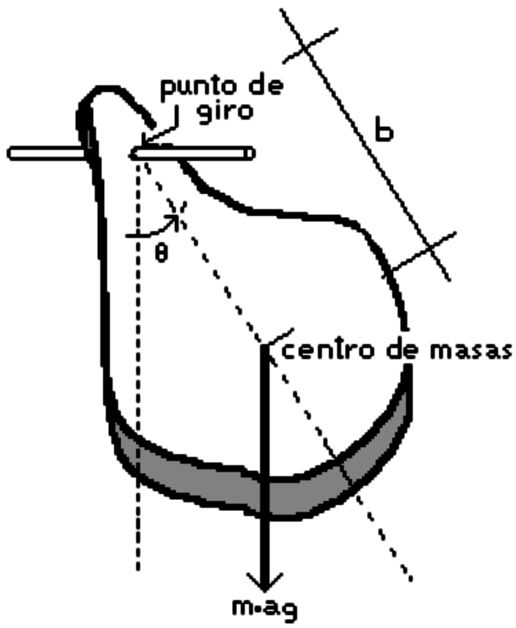

Figura 01-05

Cuando el ángulo es pequeño, entonces el $sen(\theta) \simeq \theta$. Acomodando términos resulta la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{m \cdot a_g \cdot b}{Io}\right] \cdot \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \left[\frac{m \cdot a_g \cdot b}{Io}\right] \cdot \theta \qquad 1.18$$

y el periodo de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{Io}{m \cdot a_g \cdot b}} \quad 1.19$$

1.3. COMBINACIONES DE RESORTES.

Los resortes pueden combinarse entre si y una masa oscilante en tres formas posibles: en paralelo, en serie y acoplados; para cada situación todo el sistema se puede trasformar en un solo resorte equivalente, cuya constante elástica representa lo que se desea determinar.

1.3.1. Resortes en Paralelo.

Cuando dos o más resortes son colocados en paralelo (uno al lado del otro) y unidos a una masa "m" por uno de sus extremos y a un punto fijo por el otro se tiene que al desplazar la masa una cantidad "Δx" cada resorte experimentara una fuerza que dependerá de su constante elástica.

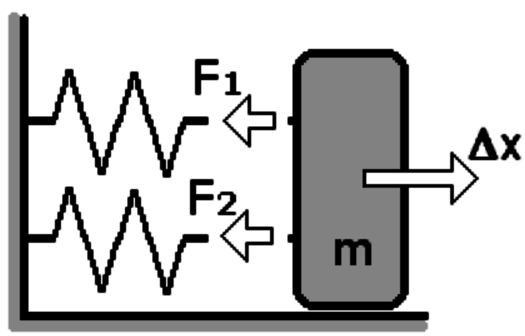

Figura 01-06

La suma vectorial de esas fuerzas representa la fuerza total equivalente; luego, trabajando con dos resortes (ver figura inferior) tenemos que la fuerza equivalente es:

$$F_{equivalente} = F_1 + F_2 = \sum F_i \quad 1.20$$

Si la fuerza equivalente es igual a una constante elástica equivalente y al desplazamiento del cuerpo entonces resulta:

$$K_{equivalente} \cdot \Delta x = K_1 \cdot \Delta x + K_2 \cdot \Delta x \rightarrow$$

$$K_{equivalente} = K_1 + K_2 = \sum K_i \quad 1.21$$

Como conclusiones en resortes en paralelo se tiene que:

- La constante elástica equivalente es la suma de las constantes elásticas de los resortes involucrados.
- Todos los resortes experimentan el mismo desplazamiento pero diferentes fuerzas, cuya suma es la fuerza total equivalente.

1.4.2. Resortes en Serie.

En esta situación los resortes se ubican uno a continuación del otro, hasta alcanzar el cuerpo con masa. Cada resorte sin embargo experimenta una deformación diferente cuya suma es igual a la deformación total; luego debe ocurrir:

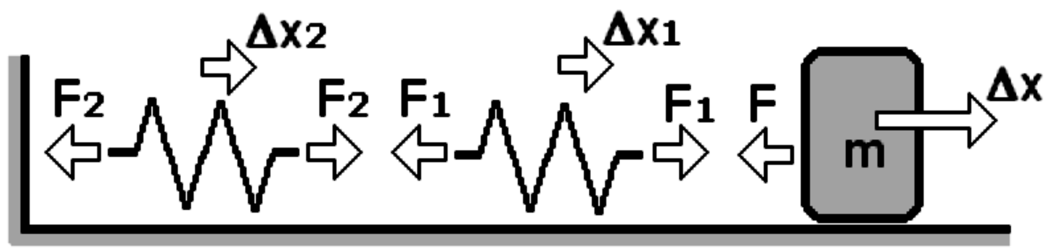

Figura 01-07

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \sum \Delta x_i \quad 1.22$$

Por ley de acción y reacción se tiene que $F_1 = F_2 = F$, entonces la constante elástica del resorte equivalente es:

$$\frac{1}{K_{equivalente}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \sum \left[\frac{1}{K_1} \right] \quad 1.23$$

Como conclusiones en resortes en serie se tiene que:

- El inverso de la constante elástica equivalente es la suma de los inversos de las constantes elásticas de los resortes involucrados.
- Todos los resortes experimentan la misma fuerza, pero tienen diferentes desplazamientos, cuya suma es igual al desplazamiento total.

1.4.3.- Resortes Acoplados.

Este puede considerarse como un caso particular de resortes en paralelo; la diferencia se presenta en esta situación es que los resortes están en caras opuestas del cuerpo, sin embargo cuando se desplaza la masa una cantidad "Δx" un resorte se comprime mientras que otro se estira; en el caso de resortes en paralelos ambos se comprimen o se estiran.

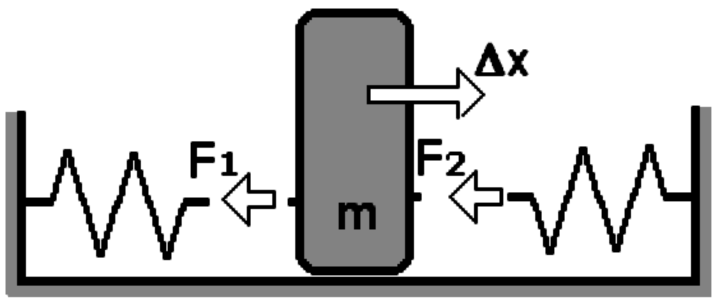

Figura 01-08

Un análisis más detallado de los resortes acoplados lo analizaremos en el tema n°6; dado que su verdadera naturaleza es cuando se relacionan dos o más masas a través de diferentes resortes.

REFERENCIAS

1.- **FÍSICA. Volumen I. Mecánica**.
Marcelo Alonso y Edward J. Finn.
Addison - Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.

2.- **VIBRACIONES Y ONDAS. Curso de Física del M.I.T.**
A.P. French.
Editorial Reverte, S. A. España. 1982.

3.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Dinámica.**
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston.
Libros McGrall-Hill. México 1979.

4.- **MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Volumen II. Dinámica**.
Harry R. Nara.
Editorial Limusa. México 1979.

5.- **MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA. Volumen 1**.
Erwin Kreyszig.
Editorial Limusa. México 1981.

6.- **CALCULUS. Volumen 1.**
Tom M. Apostol.
Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. 1982.

7.- **FÍSICA GENERAL. Volumen I.**
Douglas C., Ginacoli.
Prentice - Hall hispanoamericana, S.A. México 1988.

8.- **FÍSICA tomo I.**
Paul A. Tipler.
Editorial Reverte, S.A. Colombia 1990.

9.- **FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y DE LA SALUD.**
Simon G. G. MacDonald. Y Desmond M. Burns.
Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1978.