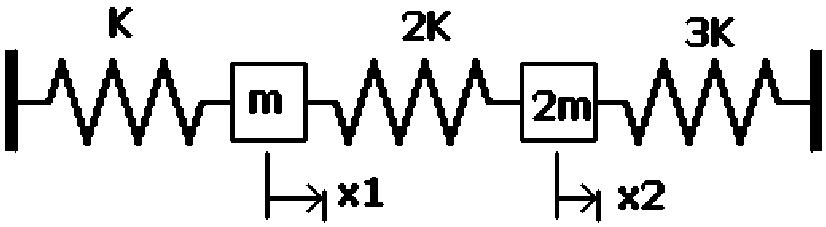
Ejemplo 06-01

Dado el siguiente sistema de cuerpos acoplados, determinar las frecuencias normales de vibración y dibujar esquematicamente como se mueven las particulas del sistema en sus modos normales.



Aplicamos la expresión 6.9 (ver tema 6) a cada particula, resulta:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx_1 = m_1 \cdot a_1 \rightarrow$$

$$-K \cdot (x_1) - 2K \cdot (x_1 - x_2) = m \cdot \ddot{x}_1 \rightarrow$$

$$\ddot{x}_1 + 3\omega_o^2 \cdot x_1 - 2\omega_o^2 \cdot x_2 = 0 \qquad [1]$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx_2 = m_2 \cdot a_2 \rightarrow$$

$$-2K \cdot (x_2 - x_1) - 3K \cdot (x_2) = 2m \cdot \ddot{x}_2 \rightarrow$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{5}{2}\omega_o^2 \cdot x_2 - \omega_o^2 \cdot x_1 = 0 \qquad [2]$$

Siendo $\omega_o^2 = K/m$; como la solución del sistema es la suma de los movimientos en modos normales (dos dado que hay dos partículas), entonces debe ocurrir para una frecuencia normal cualquiera ω_n que:

$$x_1 = A_1 \cdot sen(\omega_n \cdot t + \phi_n) \rightarrow \ddot{x}_1 = -A_1 \cdot \omega_n^2 \cdot sen(\omega_n \cdot t + \phi_n)$$

$$x_2 = A_2 \cdot sen(\omega_n \cdot t + \phi_n) \rightarrow \ddot{x}_2 = -A_2 \cdot \omega_n^2 \cdot sen(\omega_n \cdot t + \phi_n)$$

Sustituyendo en la expresiones [1] y [2] y cancelando el término común $sen(\omega_n \cdot t + \phi_n)$, tenemos:

$$-A_1\cdot\omega_n^2+3\omega_o^2\cdot A_1-2\omega_o^2\cdot A_2=0\rightarrow A_1\cdot[3\omega_o^2-\omega_n^2]=2\omega_o^2\cdot A_2 \qquad [3]$$

$$-A_2\cdot\omega_n^2+\frac{5}{2}\omega_o^2\cdot A_2-\omega_o^2\cdot A_1=0\rightarrow A_2\cdot\left[\frac{5}{2}\omega_o^2-\omega_n^2\right]=\omega_o^2\cdot A_1 \qquad [4]$$

Despejando A_1 de [3] en función de A_2 y sustituyendo en [4] resulta:

$$A_2\cdot\left[\frac{5}{2}\omega_o^2-\omega_n^2\right]=\omega_o^2\cdot\left[\frac{2\omega_o^2}{3\omega_o^2-\omega_n^2}\right]\cdot A_2\rightarrow$$

$$[5\omega_o^2-2\cdot\omega_n^2]\cdot[3\omega_o^2-\omega_n^2]=4\omega_o^2\cdot\omega_o^2\rightarrow$$

$$15\cdot\omega_o^4-5\omega_o^2\cdot\omega_n^2-6\omega_o^2\cdot\omega_n^2+2\cdot\omega_n^4=4\omega_o^4\rightarrow$$

$$2\cdot\omega_n^4-11\cdot\omega_o^2\cdot\omega_n^2+11\cdot\omega_o^4=0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado donde resulta:

$$\omega_n^2=\frac{11\cdot\omega_o^2\pm\sqrt{(-11\cdot\omega_o^2)^2-4\cdot 2\cdot 11\cdot\omega_o^4}}{2\cdot 2}\rightarrow$$

$$\omega_n^2=\frac{11\cdot\omega_o^2\pm 7,42\cdot\omega_o^2}{4}\rightarrow$$

$$\rightarrow\omega_1^2=9,01\cdot\omega_o^2\rightarrow\omega_1=3,03\cdot\omega_o$$

$$\rightarrow\omega_2^2=1,79\cdot\omega_o^2\rightarrow\omega_2=1,34\cdot\omega_o$$

Para cada frecuencia normal determinamos la relación entre los modos normales, esto es:

$$A_1=\left[\frac{2\cdot\omega_o^2}{3\cdot\omega_o^2-9,01\cdot\omega_o^2}\right]\cdot A_2\rightarrow x_1=-0,33\cdot x_2$$

$$A_1=\left[\frac{2\cdot\omega_o^2}{3\cdot\omega_o^2-1,79\omega_o^2}\right]\cdot A_2\rightarrow x_1=1,65\cdot x_2$$

Ejercicios Propuestos

Dado los siguientes sistemas acoplados, determinar sus frecuencias normales de vibración y como es el movimiento relativo entre las partículas.