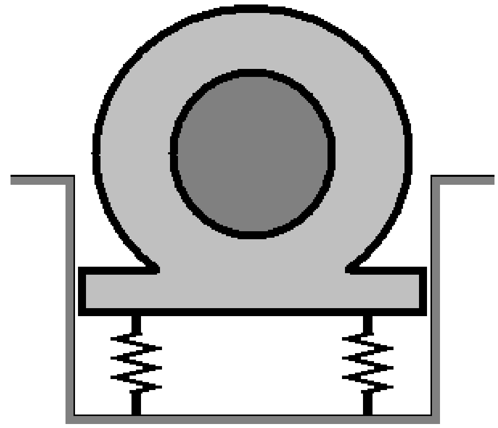
Ejemplo 05-01



Un motor de 500 kg de masa, es sostenido por cuatro resortes, cada uno de constante elástica 2000 N/cm; sabiendo que el motor vibra a 300 rpm; determinar:

a. Amplitud de la vibración provocada por el motor.
b. Frecuencia para que exista resonancia.

Determinamos la frecuencia angular natural (de resonancia) de vibración del sistema:

$$\omega^2 = \frac{K_{equiv}}{m} \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \cdot 2000\ N/cm \cdot 100\ cm/m}{500kg}} = 40\ \ rad/s$$

La amplitud de una vibración forzada no amortiguada obedece a la relación:

$$A_f = \frac{Fo}{m \cdot (\omega^2 - \omega_f^2)} \rightarrow$$

$$A_f = \frac{500\,kg \cdot 9,8\,m/s^2}{500\,kg \cdot \left[\left(\frac{300 \cdot 2 \cdot 3.1416}{60} rad/s\right)^2 - (40 rad/s)^2\right]} = 0,016\,m = 1,6\,cm$$

Nota: la amplitud de la vibración es un valor absoluto (positivo).

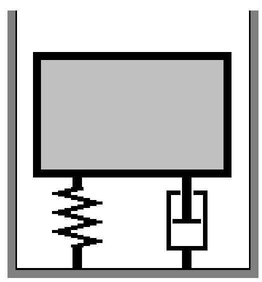
Ejercicio 05-02

Una masa de 4 kg es desplazada de su posición de equilibrio unos 4 cm; después de 10 ciclos, la amplitud de la vibración es 18 mm; sabiendo que el coeficiente elástico del resorte es 400 N/cm determinar:

a. Factor de amortiguamiento del sistema.
b. Si el sistema es sometido a una fuerza externa periódica vertical de:

$$Fo = 5N \cdot \cos(20 rad/s \cdot t)$$

Determinar la expresión general que describe el movimiento del sistema:



En primer lugar tenemos una vibración ligeramente amortiguada; cuya expresión es:

$$y = A \cdot e^{-c/2m \cdot t} \cdot sen(q \cdot t + \phi)$$

..

Debe ocurrir para los tiempos $t=0$ y $t=10 \cdot 2 \cdot \pi/q$ que:

$$4\,cm = A \cdot e^{-(c/2m)\cdot 0} = A$$

$$0,18\,cm = A \cdot e^{-10\cdot(c/2m)\cdot(2\pi/q)} \rightarrow$$

$$0,18\,cm = 4\,cm \cdot e^{-10\cdot(c\cdot\pi/m\cdot q)}$$

Aplicando antilogaritmo resulta:

$$\ln(0,18/4) = -10 \cdot c \cdot \pi/m \cdot q$$

$$c/q = 3,10 \cdot 4\,kg/3.1416 \cdot 10 = 0,395\ kg$$

Por otra parte se tiene que:

$$q^2 = \frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \rightarrow \frac{400N/cm \cdot 100cm/m}{4kg} - \left(\frac{c}{2 \cdot 4kg}\right)^2 = \left(\frac{c}{0,395\ kg}\right)^2$$

$$6,539 \cdot c^2 = 10.000 \rightarrow c = 123,66\ kg/s$$

La ecuación del movimiento tiene la forma:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + K \cdot x = Fo \cdot \cos(20 \cdot t)$$

La solución de esta expresión tiene la forma:

$$x = x_h + x_p$$

Donde:

$$x_h = A \cdot e^{-c/2m \cdot t} \cdot sen(q \cdot t + \phi) = A \cdot e^{-15,46 \cdot t} \cdot sen(315,85 \cdot t + \phi)$$

La solución particular es:

$$x_p = A \cdot \cos(20 \cdot t) + B \cdot sen(20 \cdot t)$$
$$\dot{x}_p = -A \cdot 20 \cdot sen(20 \cdot t) + B \cdot 20 \cdot \cos(20 \cdot t)$$
$$\ddot{x}_p = -A \cdot 400 \cdot \cos(20 \cdot t) - B \cdot 400 \cdot sen(20 \cdot t)$$

Sustituyendo en la expresión general y agrupando términos comunes resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\cos(20 \cdot t)[-4 \cdot A \cdot 400 + 123,66 \cdot B \cdot 20 + 40000 \cdot A = 5]$$
$$sen(20 \cdot t)[-4 \cdot B \cdot 400 - 123,66 \cdot A \cdot 20 + 40000 \cdot A = 0]$$

$$38400 \cdot A + 2473,22 \cdot B = 5$$
$$-2473,22 \cdot A + 38400 \cdot B = 0$$

Donde en definitiva:

$$x_p = 1,30 \cdot 10^{-4} m \cdot \cos(20 \cdot t) + 8,35 \cdot 10^{-6} m \cdot sen(20 \cdot t)$$

Otro mecanismo para determinar x_p es hacer uso de las correspondencias eléctricas y mecánicas, en este caso:

$$x_p = A_p \cdot \cos(20 \cdot t - \phi_p)$$

$$A_p = \frac{Fo}{Z \cdot \omega_f} = \frac{5\ N}{1924\ \ kg/s \cdot 20 rad/s} = 1,30 \cdot 10^{-4} m$$

$$Z^2 = c^2 + [X_L - X_C]^2 \rightarrow Z = \sqrt{(123,66)^2 + (80 - 2000)^2} = 1924\ kg/s$$

$$X_L = m \cdot \omega_f = 4kg \cdot 20\,rad/s = 80\ kg/s$$

$$X_C = \frac{K}{\omega_f} = \frac{40000\,N/m}{20\,rad/s} = 2000\ kg/s$$

$$tang(\phi_p) = \frac{c}{X_L - X_C} = \frac{123,66}{80 - 2000} \rightarrow \phi_p = -0,06 rad$$

Siendo:

$$\boxed{x_p = 1,30 \cdot 10^{-4} m \cdot \cos(20 rad/s \cdot t + 0,06 rad)}$$

Nota: en la pagina 18 del tema 5 la expresión para “*Ap*” esta errada, siendo la correcta la expresión indicada arriba

Ejercicios Propuestos

Un cilindro de 4 kg se cuelga de un resorte de constante 324 N/m y sobre él actúa una fuerza vertical periódica de módulo P = Pm· cos(ωf·t), donde Pm = 15 N. Determínese la amplitud del movimiento del cilindro si:

a. ωf = 6 rad/s
b. ωf = 12 rad/s

Determinar la amplitud de la vibración forzada en el ejercicio anterior si se sabe que al sistema esta conectado a una barra de amortiguamiento, que tiene coeficiente de fricción viscoso c = 20 N·s/m

Nota: resuelva el problema por los dos caminos mostrados en el ejemplo y aplique suma de vectores rotatorios para hacer las equivalencias de:

$$x_p = A \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + B \cdot sen(\omega_f \cdot t) = A_p \cdot \cos(\omega_f \cdot t - \phi_p)$$

Repita el segundo ejercicio pero en este caso la fuerza vertical periódica obedece a la relación:

P = Pm· sen(ωf·t)

P = Pm· cos(ωf·t + π/3)

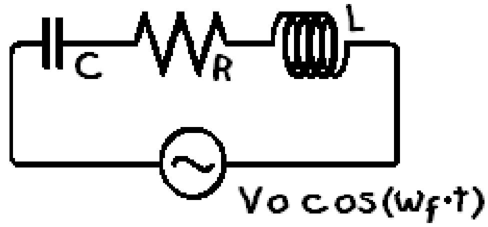
Compare resultados.

Nota 1: en esta situación sólo se puede aplicar el primer camino.
Nota 2: $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - sen(\theta) \cdot sen(\phi)$

Un cilindro de masa m se cuelga de un resorte de constante k y sobre él actúa una fuerza vertical periódica de módulo P = Pm· cos(ωf·t) Determínese el rango de valores de ωf para el cual la amplitud de la vibración excede el doble de la deformación estática ocasionada por una fuerza de módulo constante Pm.

Ejercicio 05-03

Dado el siguiente circuito eléctrico, determinar la expresión final de la corriente.



C = 10 Faraday
R = 8 Ohmios
L = 20 Henry
Vo = 5 Voltios
ω_f = 30 rad/s

Como la parte homgenea de la solución tiene a cero por culpa de la resistencia electrica, al final sólo prevalece la solución particular; en este caso, aplicando las relaciones electricas para circuitos en serie tenemos:

$$i_p = io \cdot \cos(30 \cdot t - \alpha)$$

$$io = \frac{Vo}{Z} = \frac{5V}{600,05\Omega} = 8,33 \cdot 10^{-3} amperios$$

$$Z^2 = R^2 + [X_L - X_C]^2 \rightarrow Z = \sqrt{(8)^2 + (600 - 0,0033)^2} = 600,05\Omega$$

$$X_L = L \cdot \omega_f = 20 henry \cdot 30\, rad/s = 600\,\Omega$$

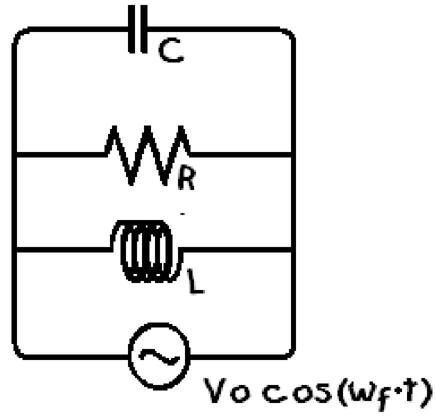
$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega_f} = \frac{1}{10 faraday \cdot 30\, rad/s} = 0,0033\ \Omega$$

$$tang(\alpha) = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{600 - 0,0033}{8} \rightarrow \alpha = 1,557 rad$$

Luego la solución es:

$$i = 8,33 \cdot 10^{-3} A \cdot \cos(30 rad/s \cdot t - 1,557 rad)$$

Ejercicio 05-04



Repita el problema anterior pero ahora los componentes están en paralelo.

C = 10 Faraday
R = 8 Ohmios
L = 20 Henry
Vo = 5 Voltios
ω_f = 30 rad/s

Como la parte homgenea de la solución tiene a cero por culpa de la resistencia electrica, al final sólo prevalece la solución particular; en este caso, aplicando las relaciones electricas para circuitos en serie tenemos:

$$i_p = io \cdot \cos(30 \cdot t - \alpha)$$

$$io = \frac{Vo}{Z} = \frac{5V}{600,05\Omega} = 300 amperios$$

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{[X_L - X_C]^2} \rightarrow 1/Z = \sqrt{(1/8)^2 + (1/(600 - 0,0033))^2} = \Omega$$

$$X_L = L \cdot \omega_f = 20 henry \cdot 30\, rad/s = 600\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega_f} = \frac{1}{10 faraday \cdot 30\, rad/s} = 0,0033\ \Omega$$

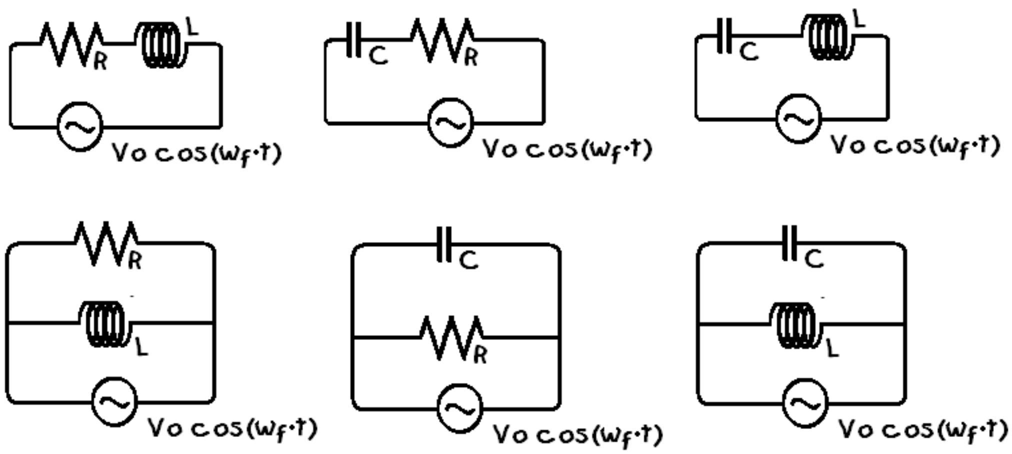
$$tang(\alpha) = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_c}}{\frac{1}{R}} = \frac{\frac{1}{600} - \frac{1}{0,0033}}{\frac{1}{8}} \rightarrow \alpha = 1,57 rad$$

Luego la solución es:

$$i = 300A \cdot \cos(30 rad/s \cdot t - 1,57 rad)$$

Ejercicios Propuestos

Dado los siguientes circuitos eléctricos, determinar la corriente final que sale de la fuente de poder.



Nota 1: use los datos de los ejercicios anteriores.

Nota 2: tenga cuidado con los casos C-L; si dibuja los vectores rotatorios correspondientes observará que el potencial y la corrientes están desfasados $\pi/2$ sólo falta determinar si es + o –.