Ejemplo 01-01

Una partícula describe un MAS, se sabe que para cuando t = 2 seg, la partícula se ubica en x = 5 cm y viaja con una velocidad de v = 20 cm/s. Si la frecuencia absoluta de la vibración es 0,3 Hz; determinar:

a. Amplitud del Movimiento.
b. Frecuencia angular de la vibración.
c. Fase de inicio.
d. Escriba la expresión $x = Ao \cdot sen(\omega \cdot t + \phi)$
e. Igual pero de la forma: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot sen(\omega \cdot t)$

Conocida la frecuencia absoluta determinamos la frecuencia angular y el periodo de vibración:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{0,3\,Hz} = 3,33\ seg$$

$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{3,33\,seg} = 1,89\ rad/s$$

Se tiene que para cualquier tiempo que la amplitud viene dada por la expresión:

$$Ao^2 = [x]^2 + \left[\frac{v}{\omega}\right]^2 \rightarrow$$

$$Ao = \sqrt{[5cm]^2 + \left[\frac{20\ cm/s}{1,89\ rad/s}\right]^2} = 11,73\ cm$$

Determimanos la ecuación del movimiento:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot sen(\omega \cdot t) \rightarrow$$

$$5\ cm = A \cdot \cos(1,89\,rad/s \cdot 2s) + B \cdot sen(1,89 rad/s \cdot 2s) \rightarrow$$

$$5\ cm = -0,81 \cdot A - 0,59 \cdot B \quad [1]$$

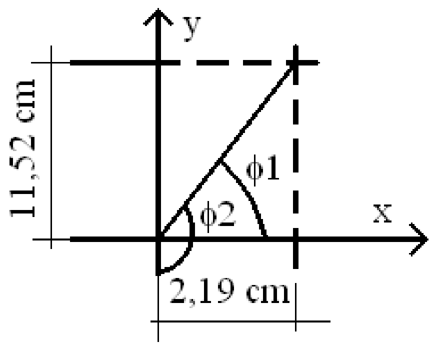
$$v/\omega = -A \cdot sen(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) \rightarrow$$

$$10,61cm = +0,59 \cdot A - 0,81 \cdot B \quad [2]$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por [1] y [2] resultan los valores de A y B, dando por resultado la expresión:

$$x = +2,19\ cm \cdot \cos(1,89 rad/s \cdot t) - 11,52\ cm \cdot sen(1,89 rad/s \cdot t)$$

Graficamente eso corresponde a dos vectores que para t = 0 se ubican como muestra la figura



<u>Nota importante:</u>

La función coseno inicia en el eje X mientras que la seno inicia en el eje -Y (dado que el valor de B es negativo se le ubica hacia +Y).

Para hallar "ϕ" siempre hay problemas, por ello es preferible determinar primero A y B, dibujarlos y ubicar luego a "ϕ" según la función que se desee, en este ejemplo:

$$x = Ao \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1)$$
$$x = Ao \cdot sen(\omega \cdot t + \phi_2)$$

Podemos conociendo A y B confirmar el valor de Ao:

$$Ao = \sqrt{(2,19cm)^2 + (-11,52cm)^2} = 11,73\ cm$$

Por otra parte las fases de inicio son respectivamente:

$$\text{tang}(\phi_1) = \tfrac{11,52cm}{2,19cm} \rightarrow \phi_1 = 1,38 rad$$

$$\phi_2 = \pi/2 + \phi_1 = 2,95 rad$$

Ejercicios Propuestos (MAS)

1. Una partícula con M.A.S. presenta una amplitud de 10 cm y un periodo de 3 segundos; se sabe que para un tiempo inicial (t = 0 seg.) la partícula se ubica en una posición x = 5 cm; determinar su fase de inicio y frecuencia natural.

2. Una partícula describe un M.A.S.; si para un tiempo de 2 segundos después de haber iniciado su movimiento una partícula se encuentra en una posición de 5 cm y tiene una rapidez de 20 cm/s; sabiendo que la amplitud del movimiento es de 25 cm; determinar la frecuencia natural y la fase de inicio del movimiento.

3. Una partícula describe un M.A.S.; si para un tiempo de 5 segundos después de haber iniciado su movimiento una partícula se encuentra en una posición de 10 cm y tiene una rapidez de 20 cm/s; sabiendo que el periodo del movimiento es de 10 segundos; determinar la frecuencia natural, amplitud y la fase de inicio del movimiento.

Ejercicios Propuestos (péndulo simple)

1. Un péndulo simple oscila con un periodo de 2 segundos; determinar la longitud de la cuerda para dicho péndulo cuando la gravedad es de 9,78 m/s².

2. Determinar el periodo de un péndulo simple si esta ubicado en un sitio donde la gravedad es de 9,8 m/s² y tiene una longitud de cuerda de 1,50 metros.

3. Cual será la gravedad en un sitio donde un péndulo simple oscila con un periodo de 3 seg, sabiendo que la longitud de la cuerda es de 2 metros.

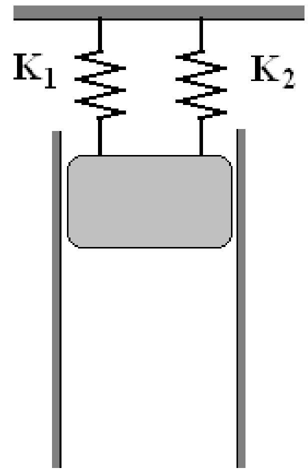
4. Se sabe que la aceleración de la gravedad varia con la altitud del terreno en una relación proporcional a:

$$ag = 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot \left[\frac{R}{R+h}\right]^2$$

   Siendo "R" el radio de la Tierra (~ 6370 km) y "h" la altitud (en kilómetros) determinar para un péndulo simple de 2 metros de longitud cual es su periodo si nos ubicamos a:

   a. El nivel del mar (h = 0 m),
   b. en Caracas (h = 1500 m),
   c. en Mérida (h = 3000 m),
   d. en el pico Bolívar (h = 5000 m)
   e. y el Himalaya (h = 8000 m).

Ejemplo 01-02



Un bloque de 60 kg de masa, cuelga entre guías verticales en la forma indicada, Si se tira del bloque unos 20 cm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Determinar:

a. Periodo de Vibración del Bloque.
b. Magnitudes de la máxima velocidad y aceleración.

Nota: K_1 = 40 N/cm y K_2 = 60 N/cm

Para cada situación determinamos las constantes equivalente:

- Como <u>los resortes están en paralelo</u>, por tanto:

$$K_{equiv} = K_1 + K_2 = 40\tfrac{N}{cm} + 60\tfrac{N}{cm} = 100\tfrac{N}{cm} = 10000\tfrac{N}{m}$$

Determinamos conociendo la constante elástica la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10000N/m}{60kg}} = 12,91\ rad/s$$

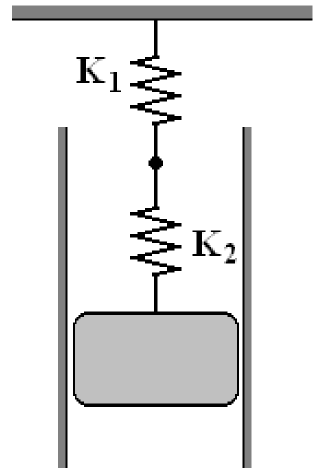
Caculamos el periodo de vibración y las correspondientes magnitudes de la valocidad y aceleración máximas:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \ rad}{12,91\ rad/s} = 0,49\ segundos$$

$$v_{\max} = Ao \cdot \omega = 0,20\,m \cdot 12,91\,rad/s = 2,58\ m/s$$

$$a_{\max} = Ao \cdot \omega^2 = 0,20m \cdot (12,91rad/s)^2 = 33,33\ m/s^2$$

Ejemplo 01-03



Un bloque de 60 kg de masa, cuelga entre guías verticales en la forma indicada, Si se tira del bloque unos 20 cm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Determinar:

a. Periodo de Vibración del Bloque.
b. Magnitudes de la máxima velocidad y aceleración.

Nota: K_1 = 40 N/cm y K_2 = 60 N/cm

Para cada situación determinamos las constantes equivalente:

- Como los resortes están en serie, por tanto:

$$\frac{1}{K_{equiv}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{40N/cm} + \frac{1}{60N/cm} \rightarrow$$

$$K_{equiv} = \left[\frac{60 \cdot 40}{60+40}\right] N/cm = 24\, N/cm = 2400 N/m$$

Determinamos conociendo la constante elástica la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2400 N/m}{60 kg}} = 6,32\ rad/s$$

Caculamos el periodo de vibración y las correspondientes magnitudes de la valocidad y aceleración máximas:

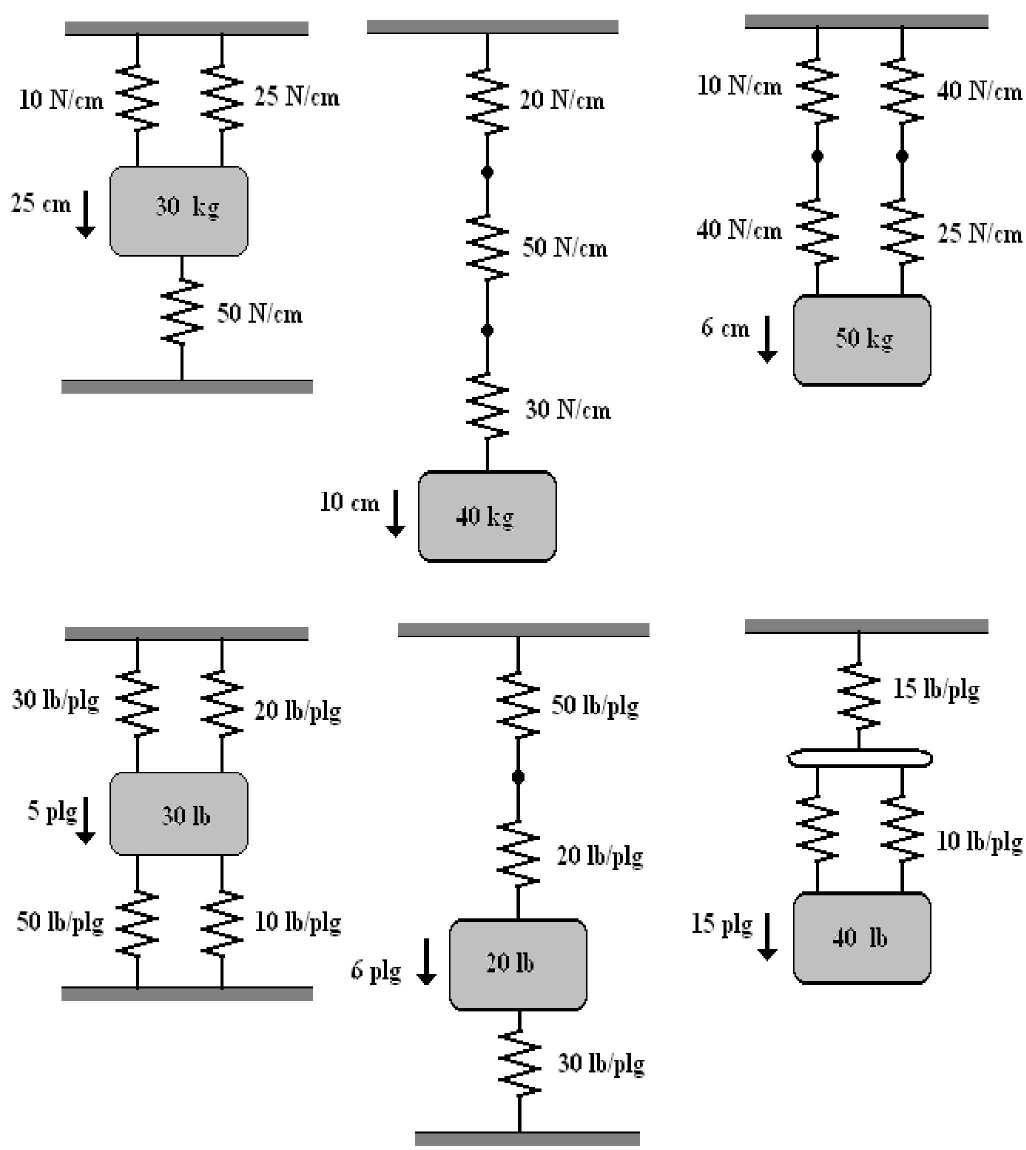
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ rad}{6,32\ rad/s} = 0,49\ segundos$$

$$v_{\max} = Ao \cdot \omega = 0,20\, m \cdot 6,32\, rad/s = 1,26\ m/s$$

$$a_{\max} = Ao \cdot \omega^2 = 0,20 m \cdot (6,32 rad/s)^2 = 8,00\ m/s^2$$

Ejercicios Propuestos (Resortes y masas)

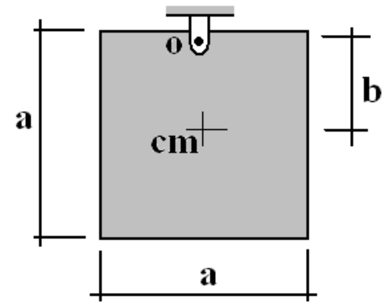
A continuación se tiene una masa sostenida por una serie de resortes, determinar el periodo de vibración de cada sistema y las velocidades y aceleraciones máximas para el desplazamiento inicial del bloque fuera de su posición de equilibrio indicado.



Nota: cuidado con las unidades inglesas: (la masa es el peso el libras entre la aceleración de la gravedad en pies/s^2) 1 pie = 12 plg

Ejemplo 01-04

Se tiene un sólido rígido suspendido como indica la figura, sea “m” la masa del objeto, determinar su periodo de vibración para cuando se balancea en el péndulo pequeños ángulos.



Para péndulos físicos se tiene que la frecuencia angular del movimiento es:

$$\omega^2 = \frac{m \cdot ag \cdot b}{Io}$$

Siendo “b” la distancia entre el centro de masa y el punto de giro “o” e “Io” el momento de inercia respecto al punto de giro “o” del cuerpo.

Determinamos el momento de inercia (por lo general se conoce el momento de inercia del objeto respecto a su centro de masas, para poder determinar el correspondiente aplicamos el **Teorema de los ejes paralelos**, que establece:

$$Io = Icm + m \cdot b^2$$

Para un rectángulo de base “B” y altura “H” el momento de inercia respecto al centro de masas es:

$$Icm = \frac{m}{12} \cdot [B^2 + H^2] \rightarrow Icm = \frac{m}{12}[a^2 + a^2] = \frac{m \cdot a^2}{6}$$

Luego tenemos que:

$$Io = \frac{m \cdot a^2}{6} + m \cdot \left[\frac{a}{2}\right]^2 \rightarrow Io = m \cdot a^2 \cdot [\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}] = \frac{5}{12} \cdot m \cdot a^2$$

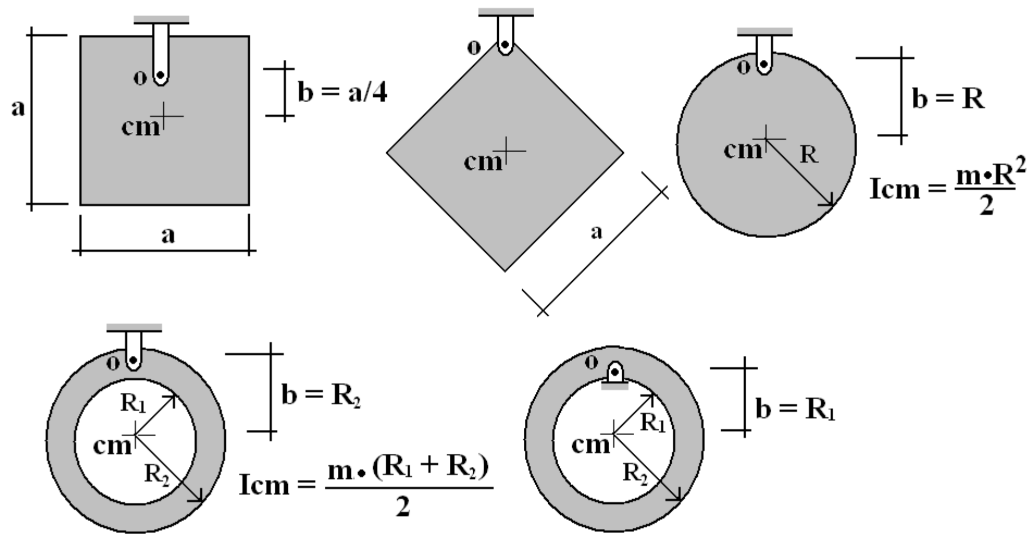
Donde resulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot a_g \cdot \frac{a}{2}}{\frac{5}{12} \cdot m \cdot a^2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot a_g}{5 \cdot a}} \rightarrow$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot a}{6 \cdot a_g}}$$

Ejercicios Propuestos (péndulo físico)

Dados los siguientes sólidos rígidos, determinar su periodo de oscilación, para pequeñas oscilaciones respecto a su posición de equilibrio.

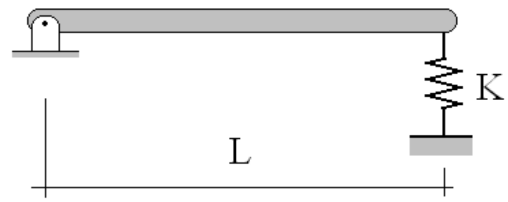


Nota: para las dos últimas figuras se tiene que:

a. $R_2 = 2R_1$
b. $R_2 = 3R_1$
c. $R_2 = 5R_1$

Ejemplo 01-05

Una varilla delgada de masa “m” esta apoyada sobre un resorte de constante “K” y un apoyo fijo como muestra la figura. Determinar el periodo de vibración de la varilla si el extremo B de la misma es desplazado una pequeña cantidad “yo” hacia abajo



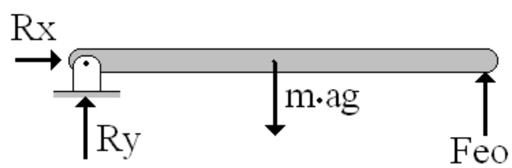
Como primer paso determinanos las reacciones con el sistema en equilibrio, esto es:

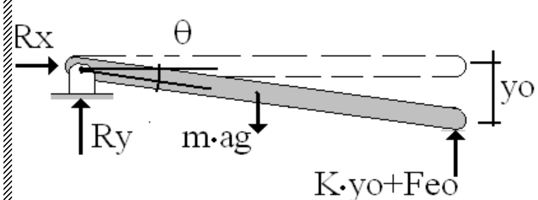
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = 0 \rightarrow Rx = 0$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum Fy = 0 \rightarrow Ry + Feo = m \cdot a_g$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum Mo = 0 \rightarrow m \cdot a_g \cdot L/2 = Feo \cdot L \rightarrow$$

$$Feo = Ry = \frac{m \cdot a_g}{2}$$





Como segundo paso vemos como ocurre el movimiento y aplicamos, dado que se trata de un giro en “o” suma de momentos en dicho punto, esto es:

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum Mo = Io \cdot \alpha \rightarrow$$

$$+ m \cdot a_g \cdot L/2 - (Feo + K \cdot yo) \cdot L = Io \cdot \alpha \rightarrow \alpha + \frac{K \cdot L}{Io} \cdot yo = 0$$

Cancelamos el termino del peso con la parte de la fuerza elástica inicial, recordemos $m \cdot a_g/2 = Feo$; falta para acomodar la ecuación a la forma de MAS determinar el valor del momento de inercia y cuanto es “yo” en términos del ángulo “θ”. Por teorema de los ejes paralelos resulta:

$$Io = Icm + m \cdot b^2 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 + m \cdot \left[\frac{L}{2}\right]^2 \rightarrow$$

$$Io = \frac{1}{3} m \cdot L^2$$

Por otra parte para pequeños angulos “θ” tenemos que:

$$yo \simeq L \cdot \theta$$

Sustituyendo todo resulta la expresión:

$$\alpha + \frac{K}{Io} \cdot yo = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3K}{m \cdot L^2} \cdot L \cdot L \cdot \theta = 0 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3K}{m}} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{3K}}$$

Ejercicios Propuestos (combinaciones de resortes y péndulos físicos)

A los cuerpos que se muestran a continuación, determinar su periodo de vibración y frecuencia angular natural de vibración.